COGNOME ______ NOME ______ MATRICOLA $\lfloor\_\lfloor\_\lfloor\_\lfloor\_\lfloor\_\lfloor\_\rfloor$	NON SCRIVETE QUI 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7	

UNIVERSITÀ DI PARMA — C. L. in Matematica

ESAME DI ELEMENTI DI MATEMATICA

A.A. 2019-2020 — PARMA, 14 FEBBRAIO 2020

Riempite immediatamente questo foglio scrivendo **in stampatello** cognome, nome e numero di matricola, e fate una barra sul Corso. Scrivete cognome e nome (in stampatello) su ogni foglio a quadretti.

Il tempo massimo per svolgere la prova è di cinquanta minuti. Non potete uscire se non dopo avere consegnato il compito, al termine della prova.

Svolgete prima i calcoli in brutta, poi svolgete ordinatamente gli esercizi su questo foglio.

È obbligatorio consegnare sia il testo, sia tutti i fogli ricevuti; al momento della consegna, inserite tutti i fogli a quadretti dentro quello con il testo. Potete usare solo il materiale ricevuto e il vostro materiale di scrittura (in particolare è vietato usare appunti, calcolatrici, foglietti ecc.). Non usate il colore rosso.

Nell'apposito spazio, **dovete riportare sia la risposta che lo svolgimento**.

---

1) Negate la seguente proposizione:

$$\forall \mathbf{x} > \mathbf{0} \quad \exists \mathbf{y} \leq \mathbf{5} : \quad [\,\mathbf{P(x,y)} \ \underline{\mathbf{o}}\ \mathbf{Q(x,y)}\,] \ \ \underline{\mathbf{e}}\ \ \mathbf{R(x,y)}$$

Risposta: ... $\exists x > 0 : \ \forall y \leq 5$ NON (P $\underline{o}$ Q) $\underline{o}$ NON R

$\exists x > 0 : \ \forall y \leq 5$ [NON P(x,y) $\underline{E}$ NON Q(x,y)] $\underline{o}$ NON R(x,y)

2) Date la definizione di **inclusione tra due insiemi** e completate:

$A \subseteq B \iff$ ... $\forall x \quad x \in A \Rightarrow x \in B$

non $(A \subseteq B) \iff$ ... $\exists x : \quad x \in A \ \underline{E}\ x \notin B$

3) Completate correttamente la diseguaglianza:

$0 < a < b < c \quad \Rightarrow \quad (a-c)^2 \ \ .>. \ \ (b-c)^2$

riportando e giustificando tutti i passaggi.

Risposta: ... $0 < a < b < c \underset{-c}{\Rightarrow} -c < a - c < b - c < 0$

$\Rightarrow 0 < (b-c)^2 < (a-c)^2$

$x < y < 0 \iff 0 < y^2 < x^2$

4) Scrivete la definizione precisa di funzione strettamente crescente per una funzione $f : \mathrm{dom}\, f \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e poi la negazione di tale definizione.

Risposta: . . . $\forall x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f \qquad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$

<u>NEG</u> $\quad \exists\, x_1, x_2 \in \mathrm{dom} f \ : \quad x_1 < x_2 \ \underline{E}\ f(x_1) \geq f(x_2)$

5) Dimostrate (con tutti i passaggi e le proprietà utilizzate) la formula seguente:

$$(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$$

Dimostrazione: . . Per la def. di uguaglianza tra due insiemi ($E=F \Leftrightarrow \forall x \ x\in E \Leftrightarrow x\in F$) dobbiamo dimostrare che $\forall x \quad x \in (A\cup B)\setminus C \Leftrightarrow x \in (A\setminus C)\cup(B\setminus C)$:

$$x\in(A\cup B)\setminus C \underset{\text{Def differenza}}{\Leftrightarrow} x\in(A\cup B)\ \underline{E}\ x\notin C \underset{\text{Def }\cup}{\Leftrightarrow} (x\in A\ \underline{O}\ x\in B)\ \underline{E}\ x\notin C$$

$$\underset{\substack{\text{proprietà}\\ \text{distributiva}\\ \text{di } \underline{E} \text{ risp a } \underline{O}}}{\Leftrightarrow} (x\in A\ \underline{E}\ x\notin C)\ \underline{O}\ (x\in B\ \underline{E}\ x\notin C) \underset{\text{Def }\setminus}{\Leftrightarrow} (x\in A\setminus C)\ \underline{O}\ (x\in B\setminus C)$$

$$\underset{\text{Def }\cup}{\Leftrightarrow} x\in(A\setminus C)\cup(B\setminus C)$$

6) Date due funzioni $f : A \to B$, $g : B \to C$, dimostrate che se le due funzioni f, g sono iniettive allora la loro composizione è una funzione iniettiva.

Dimostrazione: . . $\boxed{\text{IP}}$ f, g sono iniettive cioè

$f: A\to B \qquad \forall\, a_1, a_2 \in A \quad a_1 \neq a_2 \Rightarrow f(a_1) \neq f(a_2)$

$g: B\to C \qquad \forall\, b_1, b_2 \in B \quad b_1 \neq b_2 \Rightarrow f(b_1) \neq f(b_2)$

$\boxed{\text{TESI}}$ $\quad g\circ f: A\to C$ è iniettiva cioè $\forall a_1, a_2 \in A \quad a_1\neq a_2 \Rightarrow (g\circ f)(a_1)\neq(g\circ f)(a_2)$

Siano dunque $a_1, a_2 \in A$ tali che $a_1 \neq a_2 \overset{\text{IP}}{\underset{f \text{ iniettiva}}{\Rightarrow}} f(a_1)\neq f(a_2) \Leftrightarrow$ $\quad f(a_1)=b_1\in B$, $f(a_2)=b_2\in B$

$b_1 \neq b_2 \overset{\text{IP}}{\underset{g \text{ iniettiva}}{\Rightarrow}} g(b_1)\neq g(b_2) \Leftrightarrow$

$\underset{\substack{b_1=f(a_1)\\ b_2=f(a_2)}}{\Leftrightarrow} g(f(a_1))\neq g(f(a_2)) \underset{\substack{\text{def.}\\ \text{composizione}}}{\Leftrightarrow} (g\circ f)(a_1)\neq(g\circ f)(a_2)$.

7) Considerate i due predicati:

$$\mathbf{P(x)} : \left[x\,(x+2) < 15 \ \underline{\text{e}}\ \frac{3}{2}x + 3 \leq 0 \right] \qquad \mathbf{Q(x)} : 1 \leq |x| \leq 5\,.$$

a) Dopo aver determinato quali valori di x rendono vera la proposizione $\mathbf{P(x)}$ e quali rendono vera $\mathbf{Q(x)}$, dite (motivando la risposta) se è VERA o FALSA la seguente proposizione

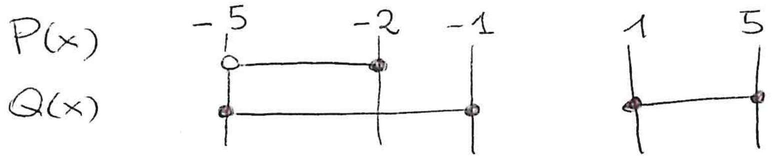
$$\forall \mathbf{x} \in \mathbf{R} \qquad \mathbf{P(x)} \ \Rightarrow\ \mathbf{Q(x)}\ .$$

Risposta: ... $P(x)$ $\quad x^2+2x-15<0 \quad x_{1,2}=\dfrac{-1\pm 4}{1}=-1\pm 4 \ \begin{matrix} \nearrow x_1=-5 \\ \searrow x_2=3 \end{matrix} \quad -5<x<3$

$\frac{3}{2}x \leq -3 \quad x \leq -2$

$P(x): \ (-5<x<3) \ \underline{E} \ x \leq -2 \qquad P(x) = \text{"}-5<x\leq -2\text{"}$

$Q(x): \ (x \leq -1 \ \underline{o} \ x \geq 1) \ \underline{E} \ (-5 \leq x \leq 5) \quad Q(x) = \text{"}-5 \leq x \leq -1 \ \underline{o} \ 1 \leq x \leq 5\text{"}$



$\forall x \ P(x) \Rightarrow Q(x)$ è <u>VERA</u> in quanto ogni x che verifica $P(x)$ verifica anche $Q(x)$ (e non c'è nessun x che renda $P(x)$ vera e $Q(x)$ falsa).

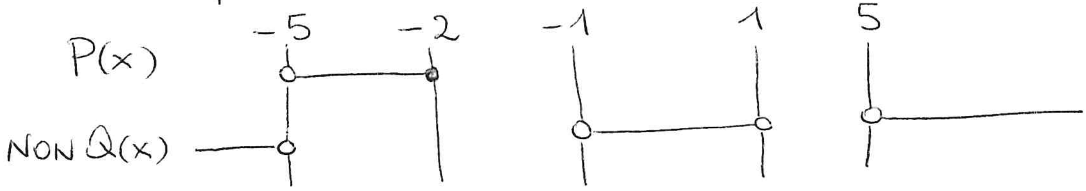
b) Scrivete prima la negazione teorica della proposizione assegnata, poi la negazione esplicita, infine rispondete alle domande.

Negazione teorica: ... $\exists x \in \mathbb{R} : \ P(x) \ \underline{E} \ (\text{NON } Q(x))$

Negazione esplicita: ... $\exists x \in \mathbb{R} : \ -5 < x \leq -2 \ \underline{E} \ (x<-5 \ o \ -1<x<1 \ \underline{o} \ x>5)$

Vera o falsa? .. FALSA perchè non esiste nessun x che verifichi entrambe:

Perchè? ...



se indichiamo $A = \{x : P(x)\}$ $\quad B = \{x : \text{NON } Q(x)\}$ risulta $A \cap B = \emptyset$