ELEMENTI di MATEMATICA - Prof.ssa A. COSCIA

7ª lezione, 9 ottobre 2017

... riprendiamo le $\boxed{\text{FUNZIONI } f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}}$

<u>OSS.</u> Se di una funzione viene data solo la legge, allora si intende che come insieme A si consideri il **DOMINIO MASSIMALE** di f cioè

$$A = \text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : f(x) \text{ esiste}\}$$

e come insieme B tutto $\mathbb{R}$.
Quindi si prende l'insieme di partenza il più ampio possibile.

<u>ES.</u> $f(x) = x^2 \quad \text{dom} f = \mathbb{R}$

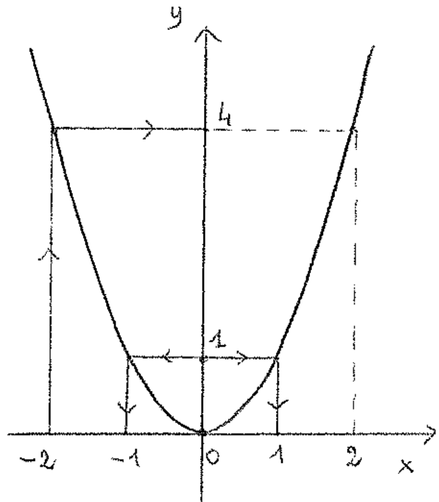
$f(x) = \dfrac{x}{x-1} \quad \text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : x-1 \neq 0\} = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$f(x) = \dfrac{3}{x^2+5x+6} - \dfrac{x}{x+1} \quad \text{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : \underbrace{x^2+5x+6 \neq 0, x+1 \neq 0}_{\text{devono essere verificate contemporaneamente}}\} = \mathbb{R} \setminus \{-1, -2, -3\}$

Se si devono considerare <u>più CONDIZIONI</u> esse devono essere <u>MESSE A SISTEMA</u> perchè $x \in \text{dom} f \iff$ tutte le condizioni in x sono verificate.

<u>ESEMPI</u> $f(x) = x^2 \quad f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

Il grafico di f è $\text{graf} f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = x^2\}$ quindi otteniamo la parabola di EQ.^{NE} $y = x^2$, cioè quella di base.



Abbiamo già studiato questa funzione, ma ora analizziamola utilizzando il grafico

<u>dom f</u> $= \mathbb{R}$ (proiezione del grafico sull'asse x)

$f(-2) = 4$ l'immagine di $x = -2$ è $y = 4$

$f^{-1}(1) = \{-1, 1\}$ $\quad \text{Im} f = [0, +\infty[$ (proiezione del grafico sull'asse y)

Il problema della RICERCA delle CONTROIMMAGINI si può esprimere anche attraverso un' EQUAZIONE. Se consideriamo l'equazione $f(x)=1$ essa ha per soluzione tutti i valori di $x \in \text{dom} f$ per i quali $f(x)$ sia 1, quindi le soluzioni sono tutte e sole le controimmagini di 1.

Per risolverla graficamente si deve intersecare il grafico con la retta orizzontale $y=1$ (ottenendo 2 punti $(-1,1)$ e $(1,1)$) e poi individuare l'ascissa dei punti trovati (ossia $x=-1$ e $x=1$).

Quindi, come abbiamo già osservato, se consideriamo le rette orizzontali $y=K$ il numero delle intersezioni di tale retta con il grafico di f ci fornisce il numero delle controimmagine del valore K e il numero delle soluzioni dell'equazione $f(x)=K$.

N° di SOL.ni dell' EQ.NE $f(x)=K$

$f(x)=x^2$

$K<0$ nessuna sol.ne

$K=0$ 1 sol.ne $(x=0)$

$K>0$ 2 sol.ni $(x=\pm\sqrt{K})$.

Concludiamo immediatamente che f NON è suriettiva perchè tutti i numeri $K<0$ sono privi di controimmagini e NON è iniettiva perchè tutti i numeri $K>0$ hanno 2 controimmagini. Si ricava immediatamente anche che $\text{Im} f = [0,+\infty[$.

Def. Sia $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che

f è $\boxed{\text{STRETTAMENTE CRESCENTE}}$ su A se
o anche solo CRESCENTE

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ (si dice che f CONSERVA l'ORDINE)

(DEBOLMENTE CRESCENTE se $f(x_1) \le f(x_2)$).

9/10/17

Si dice che f è $\boxed{\text{STRETTAMENTE DECRESCENTE}}$ su A se
o anche solo DECRESCENTE

$\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) > f(x_2)$ (si dice che f INVERTE l'ORDINE)

(DEBOLMENTE DECRESCENTE se $f(x_1) \geq f(x_2)$).

Se f è STRETTAMENTE CRESCENTE o STRETTAMENTE DECRESCENTE, allora si dice che f è $\boxed{\text{STRETTAMENTE MONOTONA}}$, se f è DEBOLMENTE CRESCENTE o DEBOLMENTE DECRESCENTE si dice che f è $\boxed{\text{MONOTONA}}$.

PROPRIETÀ. Una funzione STRETTAMENTE MONOTONA è INIETTIVA.

Dim. Se f è strettam. crescente o strettamente decrescente risulta che $\forall x_1, x_2 \in A \quad x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) < f(x_2)$ o $f(x_1) > f(x_2)$.

In particolare è chiaro che se $x_1 \neq x_2 \Rightarrow f(x_1) \neq f(x_2)$.

ESEMPI 1) $f(x) = 2x$ è STRETTAMENTE CRESCENTE su $\mathbb{R}$. Infatti se $x_1 < x_2 \Rightarrow f(x_1) = 2x_1 < 2x_2 = f(x_2)$.

Si può dedurre che è strettamente crescente anche dal grafico.

2) $f(x) = x^2$ non è STRETTAM. CRESCENTE né DECRESCENTE su $\mathbb{R}$.

Possiamo però dire che f è STRETTAMENTE DECRESCENTE su $]-\infty, 0]$ e STRETTAMENTE CRESCENTE su $[0, +\infty[$. Questa proprietà si legge dal GRAFICO e si dimostra anche:

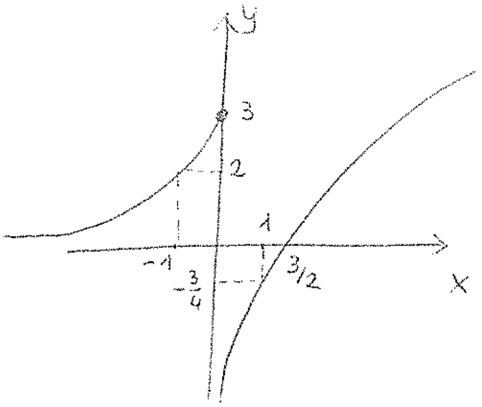
$\forall x_1, x_2 \quad x_1 < x_2 < 0 \Rightarrow 0 < x_2^2 < x_1^2$ cioè $0 < f(x_2) < f(x_1)$

$\forall x_1, x_2 \quad 0 < x_1 < x_2 \Rightarrow 0 < x_1^2 < x_2^2$ cioè $0 < f(x_1) < f(x_2)$.

OSS. Se f è STRETTAM. CRESCENTE su due insiemi A_1 e A_2, non è detto che sia STRETTAM. CRESCENTE su $A_1 \cup A_2$. E lo stesso vale per DEBOLM. CRESC., STRETTAM. DECRESC. o DEBOLM. DECRESCENTE.

Ad esempio

9/10/17



dom $f = \mathbb{R}$

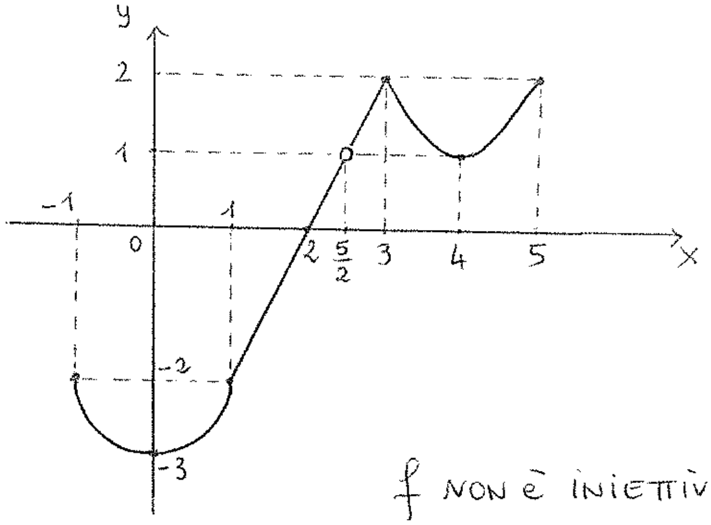
f è STRETTAM. CRESCENTE su $]-\infty, 0]$

e su $]0, +\infty[$ ma non è STRETTAM. CRESC.

su $]-\infty, 0] \cup]0, +\infty[= \mathbb{R}$. Infatti

$x_1 = -1 < x_2 = 1$ ma $f(x_1) > f(x_2)$.

<u>ESERCIZIO</u> Sia f una funzione definita dal seguente grafico:



dom $f = [-1, \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}, 5]$

$f(0) = -3$ $f(2) = 0$

$f(\frac{5}{2}) = \nexists$ $f(5) = 2$

$f^{-1}(-2) = \{-1, 1\}$ $f^{-1}(1) = \{4\}$

Im $f = [-3, 2]$

f NON è INIETTIVA perchè ad es. se $y \in]1, 2[$

y ammette 3 controimmagini

N° delle sol.ni di $f(x) = K$:

$K < -3$ nessuna sol.ne $K = -3$ 1 sol.ne $-3 < K \leq -2$ 2 sol.ni

$-2 < K \leq 1$ 1 sol.ne $1 < K < 2$ 3 sol.ni $K = 2$ 2 sol.ni $K > 2$ nessuna sol.ne

f è STRETTAM. DECRESCENTE su $[-1, 0]$ e $[3, 4]$ separatamente

f è STRETTAM. CRESCENTE su $[0, \frac{5}{2}[\cup]\frac{5}{2}, 3]$ e su $[4, 5]$

Qual è il VALORE PIÙ BASSO, cioè il <u>MINIMO</u> VALORE assunto dalla funzione f? E il <u>MASSIMO</u> valore?

Im $f = [-3, 2]$ è l'insieme dei valori assunti da f

$\Rightarrow$ $\underbrace{\min f = -3}_{\text{MINIMO ASSOLUTO}}$ e $\underbrace{\max f = 2}_{\text{MASSIMO ASSOLUTO}}$

I punti x in cui tali valori sono assunti si dicono PUNTI di MINIMO ASSOLUTO e PUNTI di MASSIMO ASSOLUTO rispettivamente.

Diamo la definizione precisa.

9/10/17

Def Sia $f: \mathrm{dom}f \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione. Si dice che $x_0 \in \mathrm{dom}f$ è

i) PUNTO di MINIMO ASSOLUTO per f se $f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom}f$

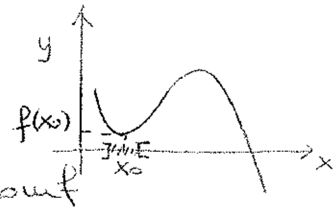
($f(x_0)$ è il VALORE MINIMO di f : $\min f = f(x_0)$)

ii) PUNTO di MASSIMO ASSOLUTO per f se $f(x_0) \ge f(x) \quad \forall x \in \mathrm{dom}f$

($f(x_0)$ è il VALORE MASSIMO di f : $\max f = f(x_0)$)

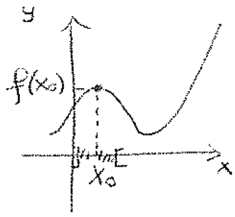
iii) PUNTO di MINIMO LOCALE per f se $\exists\, \delta > 0$:

$$f(x_0) \le f(x) \quad \forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap \mathrm{dom}f$$



iv) PUNTO di MASSIMO LOCALE per f se $\exists\, \delta > 0$:

$$f(x_0) \ge f(x) \quad \forall x \in \left]x_0 - \delta, x_0 + \delta\right[\cap \mathrm{dom}f$$



ES. Nell'es. a pag. 4 $\quad \min f = -3 = f(0) \quad \underset{\text{MIN}}{x = 0}$ è P.TO di MINIMO ASSOLUTO

$\max f = 2 = f(3) = f(5) \quad \underset{\text{MAX}}{x = 3}$ e $\underset{\text{MAX}}{x = 5}$ sono P.TI di MAX ASSOLUTO

Poi ci sono i seguenti punti di MINIMO LOCALE : $\underset{\text{MIN}}{x = 0}$, $x = 4$

e di MASSIMO LOCALE : $x = -1$, $\underset{\text{MAX}}{x = 3}$, $\underset{\text{MAX}}{x = 5}$.

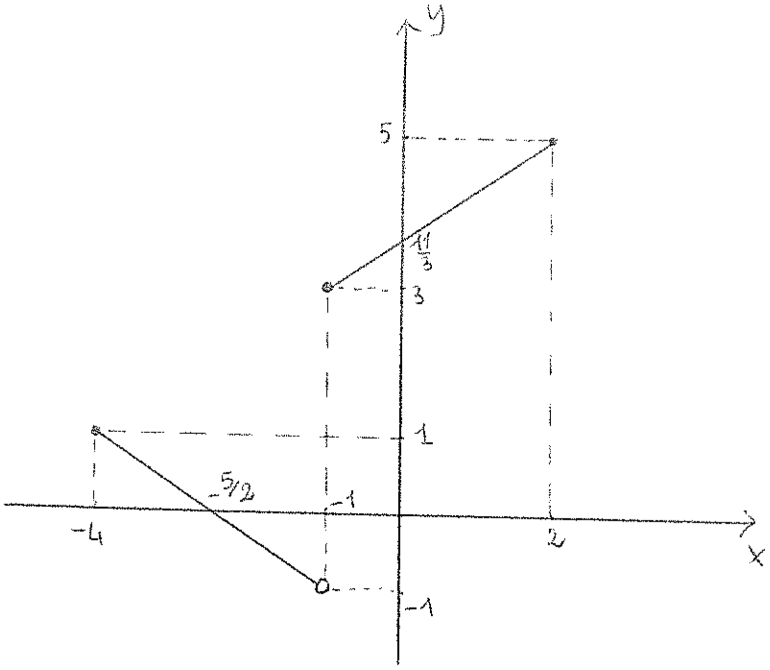
OSSERVAZIONI. 1. Se un punto è di MINIMO o MASSIMO assoluto, allora a maggior ragione è di MINIMO o MASSIMO LOCALE.

2. Un punto x_0 di MINIMO locale è un punto in cui la funzione assume un valore minore o uguale rispetto ai punti del dom$f$ vicini a x_0. Può succedere che a destra e/o a sinistra di x_0 non ci siano punti del dom$f$.

ESERCIZIO Sia f la funzione definita da

$$f(x) = \begin{cases} -\frac{2}{3}x - \frac{5}{3} & \text{se } -4 \le x < -1 \\ \frac{2}{3}x + \frac{11}{3} & \text{se } -1 \le x \le 2 \end{cases} \qquad \mathrm{dom}f = [-4, 2]$$

9/10/17



$x=-4 \to y=1$
$x=-1 \to y=-1$ } 1^a retta

$x=-1 \to y=3$
$x=2 \to y=5$ } 2^a retta

$\operatorname{Im} f =]-1,1] \cup [3,5]$

$f(-4)=1 \quad f(-1)=3$

$f(0)=\frac{11}{3}$

$f^{-1}(0)=\{-\frac{5}{2}\} \quad f^{-1}(2)=\emptyset$

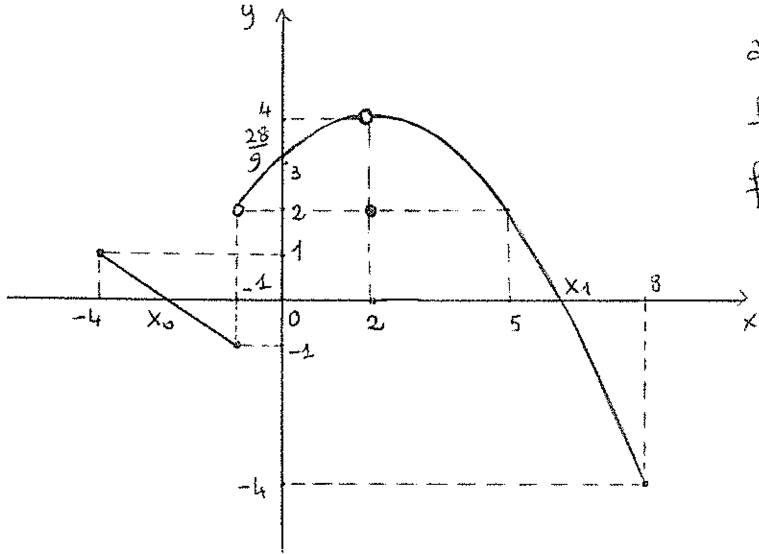
f è INIETTIVA

$\min f = \nexists \quad \max f = 5 = f(2)$ P.TO di MAX ASS. $x=2$

P.TI di MIN LOC : nessuno P.TI di MAX LOC : $x=-4$, $x=2$.

Modifichiamo la funzione

$$f(x)=\begin{cases} -\frac{2}{3}x-\frac{5}{3} & -4 \le x \le -1 \\ -\frac{2}{9}x^2+\frac{8}{9}x+\frac{28}{9} & -1 < x \le 8,\ x \ne 2 \\ 2 & x=2 \end{cases} \qquad \operatorname{dom} f = [-4, 8]$$



anche dal grafico $\operatorname{dom} f = [-4,8]$

$f(-1)=-1 \quad f(2)=2$

$f^{-1}(2)=\{2,5\}$

EQ.NE $f(x)=0$ ha 2 sol.ni x_0, x_1

$-\frac{2}{3}x_0-\frac{5}{3}=0 \quad x_0=-\frac{5}{2}$

$-\frac{2}{9}x_1^2+\frac{8}{9}x+\frac{28}{9}=0$

$x^2-4x-14=0$ ha 2 sol.ni

$x=2\pm 3\sqrt{2} \to x_1=2+3\sqrt{2}$

SOL.ni di $f(x)=0$ (cioè $f^{-1}(0)$)

$\{x_0=-\frac{5}{2}, x_1=2+3\sqrt{2}\}$

$\operatorname{Im} f = [-4,4[\quad \min f = -4 = f(8)$

$\max f \nexists \quad$ min LOC : $x=-1, x=2, x=8$

max LOC: $x=-4$

Si possono anche risolvere delle DISEQUAZIONI:

es. $f(x) > 2$ se $x \in]-1, 2[\cup]2, 5[$

$f(x) \leq 0$ se $x \in [-\frac{5}{2}, -1] \cup [2+3\sqrt{2}, 8]$.

es. $f(x) \geq \frac{4}{9}$ si deve prima risolvere $f(x) = \frac{4}{9}$ che fornisce 2 valori $x_2 = -\frac{19}{6}$ per il 1° tratto e $x_3 = 6$ per il 2° tratto. Allora

$f(x) \geq \frac{4}{9} \iff x \in [-4, -\frac{19}{6}] \cup]-1, 6]$.

N° di sol.ni di $f(x) = K$

$K < -8$ nessuna sol.ne

$-8 \leq K < -1$ 1 sol.ne

$-1 \leq K \leq 1$ 2 sol.ni

$1 < K < 2$ 1 sol.ne

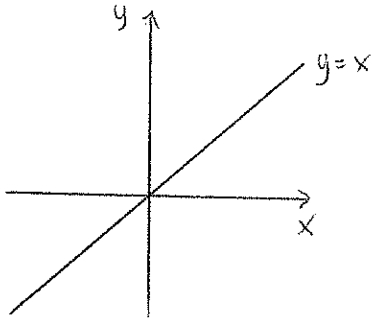
$2 \leq K < 4$ 2 sol.ni

$K \geq 4$ nessuna sol.ne.

$\boxed{\text{FUNZIONI } f(x) = x^n}$ $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ POTENZE di x

$\text{dom} f = \mathbb{R}$ $\forall n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$

GRAFICO $\boxed{f(x) = x}$ $\rightarrow y = x$

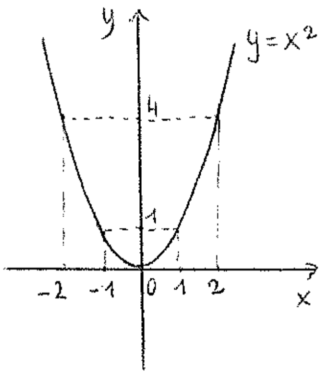


$f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$

BIUNIVOCA

STRETTAMENTE CRESCENTE

$\boxed{f(x) = x^2}$



$f: \mathbb{R} \rightarrow [0, +\infty[$ SURIETTIVA

NON INIETTIVA

$\searrow$ su $]-\infty, 0]$

$\nearrow$ su $[0, +\infty[$

$\boxed{f(x) = x^3}$ $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ BIUNIVOCA

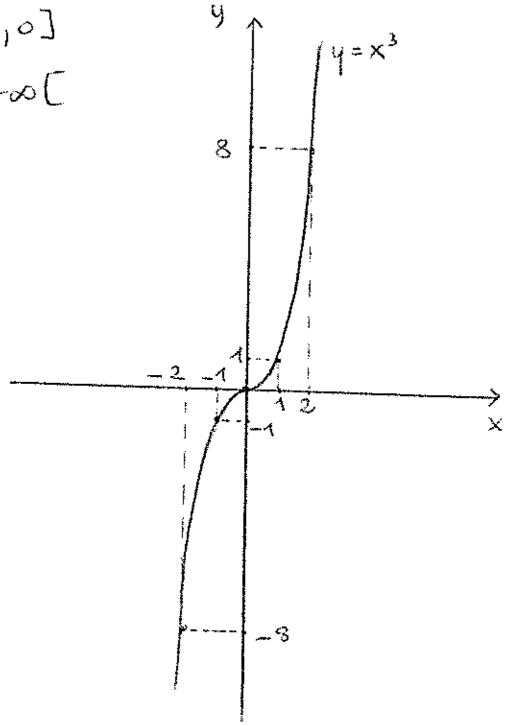
STRETTAMENTE CRESCENTE

ad ogni numero reale associa il suo CUBO

$f(0) = 0$

$x > 0 \Rightarrow x^3 > 0$

$x < 0 \Rightarrow x^3 < 0$



9/10/17

Se $f(x)=x^3$ è una funzione : $\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ BIUNIVOCA, allora vuol dire che
$$\forall y\in\mathbb{R}\ \exists!\, x\in\mathbb{R} : x^3=y$$
e possiamo "Tornare indietro" costruendo la FUNZIONE INVERSA $f^{-1}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ che ad un numero x associa l'unico numero reale il cui cubo è x.

Tale funzione si indica con $\sqrt[3]{x}$ e si chiama $\boxed{\text{RADICE CUBICA}}$ di x

$\sqrt[3]{x}:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ è tale che $\sqrt[3]{x}=a \iff a^3=x$

ad es. $\sqrt[3]{1}=1$ $\quad\sqrt[3]{8}=2$ $\quad\sqrt[3]{-1}=-1$ $\quad\sqrt[3]{-27}=-3$.