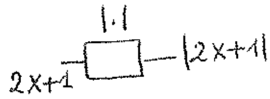
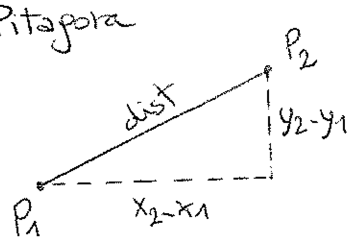
10ª lezione, 16 ottobre 2017

$$|2x+1| = \begin{cases} 2x+1 & \text{se } 2x+1 \geq 0 \\ -(2x+1) & \text{se } 2x+1 < 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} 2x+1 & \text{se } x \geq -\frac{1}{2} \\ -2x-1 & \text{se } x < -\frac{1}{2} \end{cases}$$



<u>Distanza tra due numeri reali</u> : $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ $\operatorname{dist}(x_1, x_2) = |x_2 - x_1|$
(una distanza è sempre ≥ 0)

<u>Distanza in $\mathbb{R}^2$</u> $\underset{P_1}{(x_1,y_1)}, \underset{P_2}{(x_2,y_2)} \in \mathbb{R}^2$ $\operatorname{dist}(P_1, P_2) = \sqrt{(x_2-x_1)^2 + (y_2-y_1)^2}$
per il Teorema di Pitagora



<u>OSS.</u> (IMPORTANTE) Abbiamo lavorato con i numeri reali utilizzando anche i numeri irrazionali (come $\sqrt{2}$ o π), abbiamo disegnato il grafico di $f(x)=x^2$ dando per scontato ad es. che $y=2$ ammette due controimmagini, abbiamo definito le radici n-esime e studiato tutte le proprietà di POTENZE e RADICI. Va sottolineato però che non è per nulla banale DIMOSTRARE che $\exists\, x>0 : x^2=2$ visto che non è possibile fornire esplicitamente la soluzione. Quindi non stupitevi se nel corso di ANALISI 1 (è proprio l'inizio!) ci sarà da lavorare per dimostrare questa e altre importanti proprietà di $\mathbb{R}$.

POTENZE a ESPONENTE RAZIONALE

Se scriviamo $x^{\frac{m}{n}}$ con $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$ abbiamo indifferentemente $\sqrt[n]{x^m}$ RADICE n-esima di x^m
o $(\sqrt[n]{x})^m$ POTENZA m-esima di $\sqrt[n]{x}$.

Quindi, quando non si specifica l'ordine delle operazioni ma si scrive solo $x^{\frac{m}{n}}$, si intende che DEVE ESSERE

POSSIBILE CALCOLARE la POTENZA in ENTRAMBI i MODI.

Es. $x^{3/2}$ significa $(\sqrt{x})^3$ oppure $\sqrt{x^3}$: entrambe sono definite solo per $x \geq 0$

$(\sqrt{x})^3$: $x \geq 0$; $\sqrt{x^3}$: $x^3 \geq 0 \Updownarrow x \geq 0$

$\Rightarrow$ dom $x^{3/2}$: $x \geq 0$

$x^{\frac{4}{2}}$ significa $(\sqrt{x})^4$ oppure $\sqrt{x^4}$: le due espressioni non sono definite sullo stesso insieme

$(\sqrt{x})^4$: $x \geq 0$; $\sqrt{x^4}$: $x \in \mathbb{R}$

quindi dom $x^{\frac{4}{2}}$: $x \geq 0$

mentre dom $\sqrt{x^4} = \mathbb{R}$

$x^{4/3}$ significa $\sqrt[3]{x^4}$ oppure $(\sqrt[3]{x})^4$: entrambe sono definite su $\mathbb{R}$

$\sqrt[3]{x^4}$: $x \in \mathbb{R}$; $(\sqrt[3]{x})^4$: $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ dom $x^{4/3} = \mathbb{R}$

Stessa cosa se m, n sono DISPARI $x^{5/3} = \sqrt[3]{x^5} = (\sqrt[3]{x})^5 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

<u>CONCLUSIONE</u> : quando m, n sono PARI le due funzioni $(\sqrt[n]{x})^m$ e $\sqrt[n]{x^m}$ non sono definite sullo stesso insieme

$(\sqrt[n]{x})^m$: $x \geq 0$; $\sqrt[n]{x^m}$: $x \in \mathbb{R}$

$\Rightarrow$ dom $x^{\frac{m}{n}} = [0, +\infty[$. Quindi non è sempre possibile effettuare semplificazioni nell'esponente di una potenza: come già visto non si può fare ad es.

$\sqrt{x^2} = (x^2)^{1/2} \underset{\text{Falso}}{=} x^{\frac{2}{2}} \underset{\text{Falso}}{=} x^1 = x$ FALSO perchè $x^{\frac{2}{2}}$ è definito solo se $x \geq 0$ (perchè può essere $(\sqrt{x})^2$ come $\sqrt{x^2}$). Così ritroviamo che

$\sqrt{x^2} = x \Leftrightarrow x \geq 0$ e invece $\sqrt{x^2} = |x| \quad \forall x \in \mathbb{R}$.

<u>OSS.</u> Ricordiamo che $x^{-n} = \frac{1}{x^n}$ per estendere tutto a $x^{\frac{m}{n}}$ con $m \in \mathbb{Z}$, $n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$.

ESEMPI. $f(x) = x^{2/3}$ dom $f = \mathbb{R}$ $f(-8) = (-8)^{2/3} = \sqrt[3]{(-8)^2} = \sqrt[3]{64} = 4$

$\hookrightarrow (\sqrt[3]{-8})^2 = (-2)^2 = 4$

$f(x) = \frac{1}{x^{4/5}}$ dom $x^{4/5} = \mathbb{R}$ dom $f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ $f(32) = \frac{1}{32^{4/5}} = \frac{1}{(\sqrt[5]{32})^4} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$\hookrightarrow \frac{1}{\sqrt[5]{32^4}} = \frac{1}{\sqrt[5]{2^{20}}} = \frac{1}{2^4} = \frac{1}{16}$

$f(x) = (1+8x^2)^{3/2}$ dom $f = \mathbb{R}$ $(1+8x^2 > 0 \ \forall x \in \mathbb{R})$

$f(0) = 1^{3/2} = 1$ $f(1) = 9^{3/2} = (\sqrt{9})^3 = 3^3 = 27$

$\hookrightarrow \sqrt{9^3} = \sqrt{729} = 27$ $\rightarrow \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} \cdot \sqrt{9} =$
$= 3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$

$\sqrt{a \cdot b} = \sqrt{a} \cdot \sqrt{b}$
$\Leftrightarrow a \geq 0, b \geq 0$

$f(\frac{1}{2}) = 3^{3/2} = (\sqrt{3})^3 = 3\sqrt{3}$

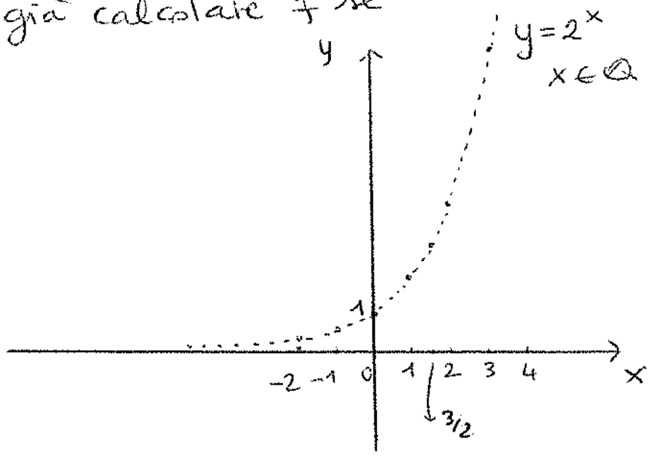
$\hookrightarrow \sqrt{3^3} = \sqrt{3^2 3} = 3\sqrt{3}$.

$\boxed{\text{FUNZIONI ESPONENZIALI } f(x) = a^x}$

a si dice BASE

Tutte queste funzioni verranno definite rigorosamente nel corso di ANALISI 1.

Lavoriamo con $a > 0$. Ad es. consideriamo $a = 2$ e cerchiamo di definire $f(x) = 2^x$. Sappiamo già calcolare f se



$x = n \in \mathbb{N}$ $f(0) = 1$ $f(n) = 2^n$

$x = m \in \mathbb{Z}$ $f(-1) = 2^{-1} = \frac{1}{2}$

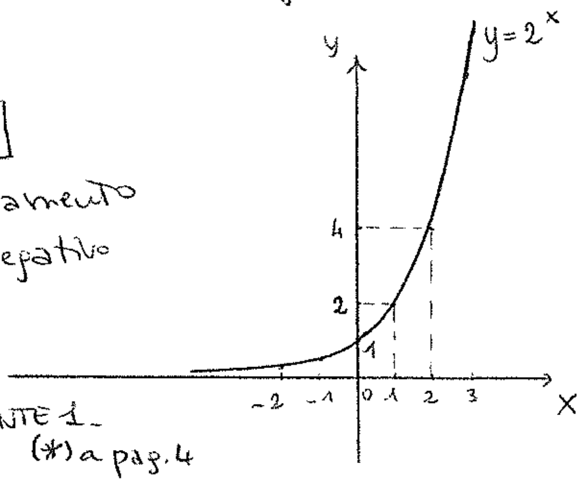
$f(-2) = 2^{-2} = \frac{1}{4}$ ecc.

$x = q = \frac{m}{n} \in \mathbb{Q}$ $f(\frac{3}{2}) = 2^{3/2} = (\sqrt{2})^3 = 2\sqrt{2} \approx 2{,}83$

se $x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ non sappiamo come definire $2^{\sqrt{2}}$ oppure 2^{π} ecc.

Vedrete che è possibile definirla in modo che il grafico risulti una linea "CONTINUA".

Tutte le funzioni $f(x) = a^x$ con $\boxed{a > 1}$ hanno un grafico che ha questo andamento (si avvicina all'asse x quando x è molto negativo e sale molto velocemente per $x > 0$).



Non si considera $a = 1$ perché si ottiene la funzione $f(x) = 1 \ \forall x$ COSTANTE 1.

(*) a pag. 4

Godono tutte delle seguenti PROPRIETÀ:

$\boxed{f(x) = a^x \quad a > 1}$

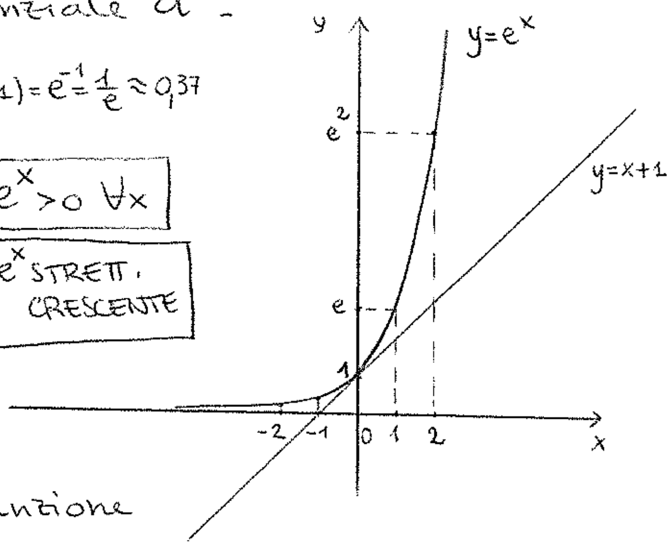
a) $\text{dom} f = \mathbb{R}$ b) $\text{Im} f =]0, +\infty[$ cioè $a^x > 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

c) valgono le proprietà delle potenze $a^{x+y} = a^x \cdot a^y$ $(a^x)^y = a^{xy}$

d) $f : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è BIUNIVOCA e STRETTAMENTE CRESCENTE.

La funzione esponenziale più utilizzata in Matematica e che si incontra più frequentemente nelle applicazioni è quella in cui la base a ha un particolare valore, cioè coincide con il NUMERO e (detto NUMERO di NEPERO, irrazionale, $e \simeq 2{,}718\ldots$).
In realtà prima si definisce e come limite di un'opportuna successione, poi si costruisce e^x, da questa la sua inversa $\log x$ e infine la funzione esponenziale a^x.

$f(x) = e^x$ $\qquad f(1) = e$ $\quad f(2) = e^2 \simeq 7{,}4$ $\quad f(-1) = e^{-1} = \frac{1}{e} \simeq 0{,}37$
$f(-2) = \frac{1}{e^2} \simeq 0{,}135$



$\boxed{e^x > 0 \ \forall x}$

$\boxed{e^x \text{ STRETT. CRESCENTE}}$

$\boxed{e^x : \mathbb{R} \to]0, +\infty[\text{ è BIUNIVOCA}}$

allora ammette FUNZIONE INVERSA

$\boxed{\log_e x :]0, +\infty[\to \mathbb{R}}$ detta $\boxed{\text{LOGARITMO di } x}$ (quando la base è e non la si scrive $\to \log x$). E' la funzione che ad ogni $x \in]0, +\infty[$ associa l'unico numero reale che messo come esponente di e fornisce come risultato x.

$x \xmapsto{e^x} y = e^x \qquad y \xmapsto{\log x} x : e^x = y$

Si dice che il LOGARITMO in base e di x ($\log_e x$) è l'ESPONENTE da dare alla base e per ottenere x.

(*) Non si considera $a = 0$ perché ad es. a^{-1} non sarebbe definito e non si considera $a < 0$ perché non sarebbe definito $a^{1/2}$ ad es.

16/10/17

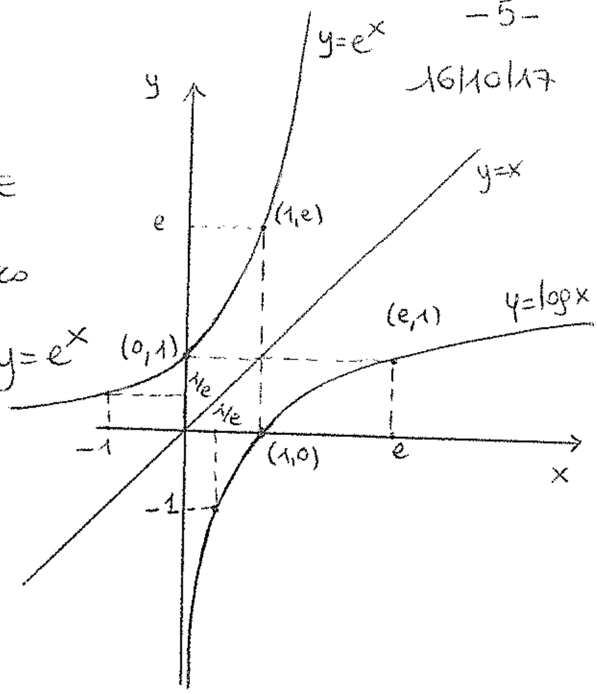
Otteniamo quindi che:

a) dom $\log x =]0, +\infty[$ b) $\operatorname{Im} \log x = \mathbb{R}$

c) $\log x$ è BIUNIVOCA e STRETTAM. CRESCENTE

d) il grafico di $\log x$ è l'insieme simmetrico rispetto alla bisettrice $y=x$ del grafico $y=e^x$

Per x che si avvicina a 0, y diventa sempre più negativa, inoltre per x che diventa grande il $\log x$ sale lentamente.



es. $\log 1 = 0$ perchè $e^0 = 1$

$\log e = 1$ perchè $e^1 = e$ $\log \frac{1}{e} = -1$ perchè $e^{-1} = \frac{1}{e}$

$\log e^2 = 2$ perchè $e^2 = e^2$ e così via.

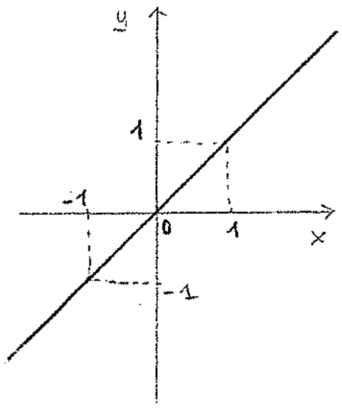
Le funzioni esponenziali più usate sono $2^x, e^x, 10^x$ e le funzioni logaritmo più frequenti sono $\log_2 x$, $\log_e x = \log x$, $\log_{10} x$.

$\log_2 x$ ↓ inversa di 2^x

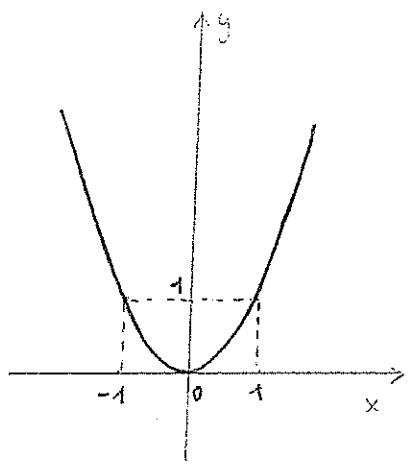
$\log_{10} x$ ↓ inversa di 10^x

GRAFICI da altri GRAFICI

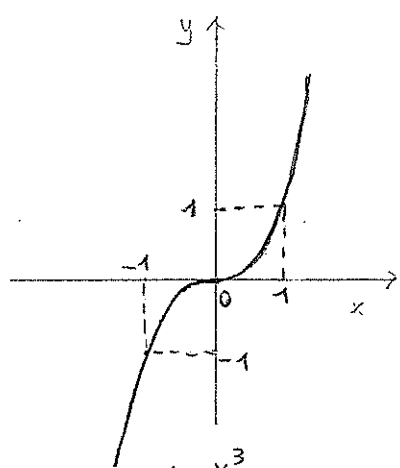
Ripassiamo il GRAFICO DELLE FUNZIONI ELEMENTARI



$y=x$

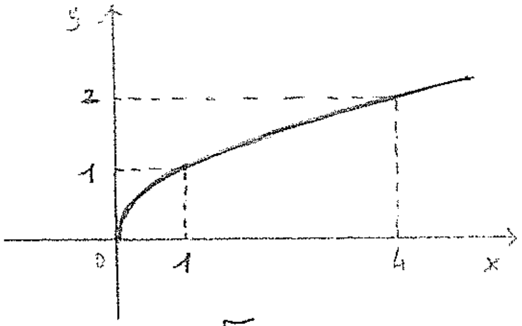


$y=x^2$



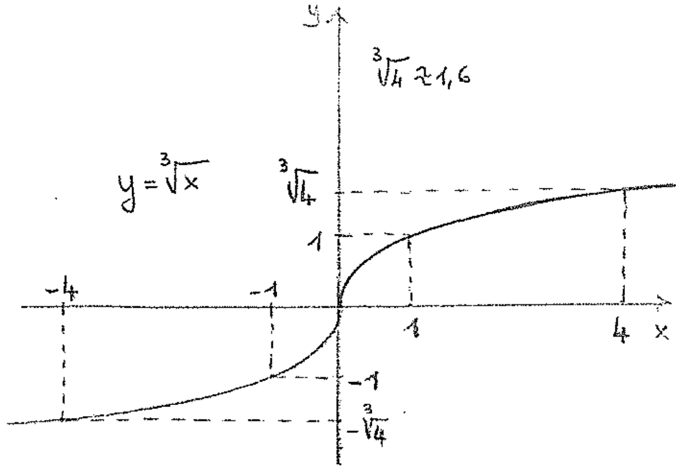
$y=x^3$

16/10/17

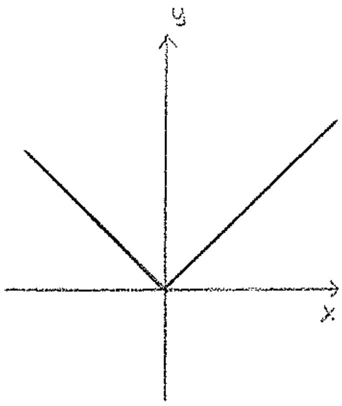


$y=\sqrt{x}$

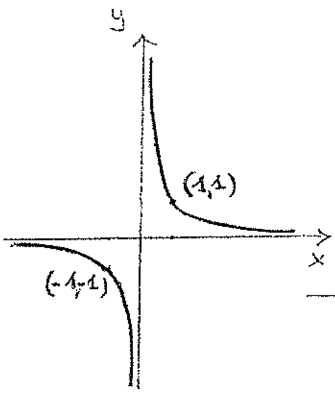
$\sqrt[3]{4} \simeq 1,6$



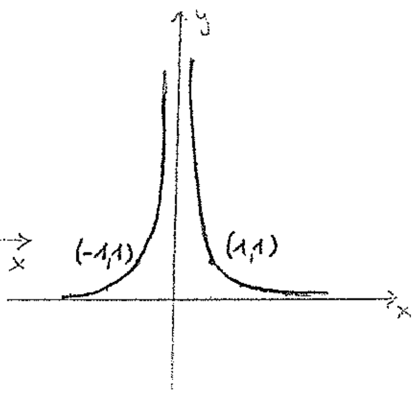
$y=\sqrt[3]{x}$



$y=|x|$

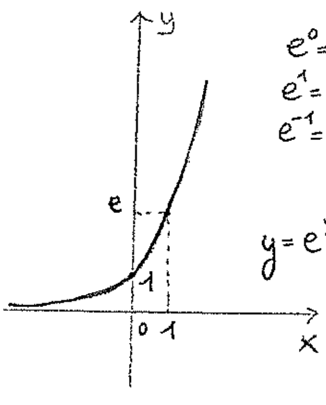


$y=\frac{1}{x}$



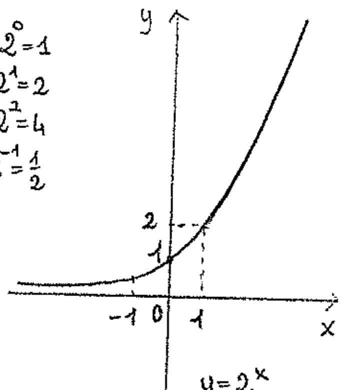
$y=\frac{1}{x^2}$

$e^0=1$
$e^1=e \simeq 2,7$
$e^{-1}=\frac{1}{e} \simeq 0,37$



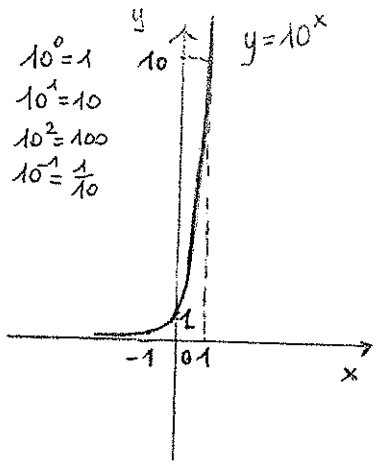
$y=e^x$

$2^0=1$
$2^1=2$
$2^2=4$
$2^{-1}=\frac{1}{2}$



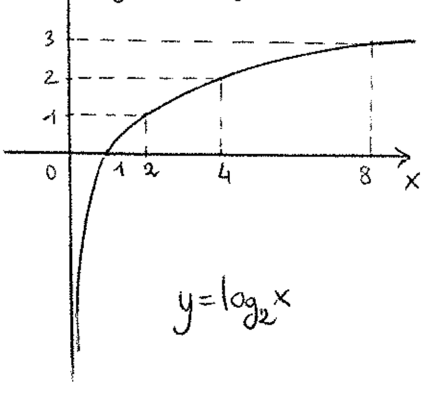
$y=2^x$

$10^0=1$
$10^1=10$
$10^2=100$
$10^{-1}=\frac{1}{10}$



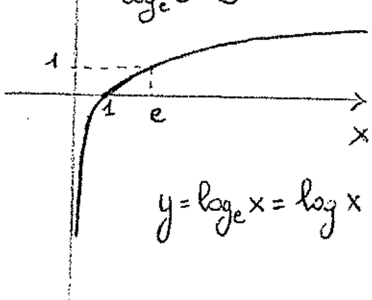
$y=10^x$

$\log_2 1=0$ $\log_2 2=1$
$\log_2 4=2$ $\log_2 8=3$



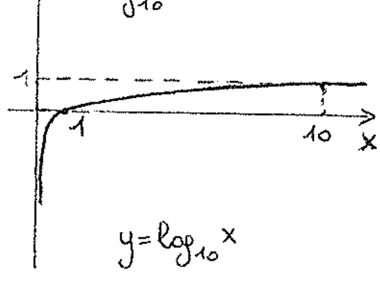
$y=\log_2 x$

$\log_e 1=0$
$\log_e e=1$
$\log_e e^2=2$



$y=\log_e x=\log x$

$\log_{10} 1=0$
$\log_{10} 10=1$
$\log_{10} 100=2$



$y=\log_{10} x$

Vediamo come, in certi casi, dall'espressione della funzione si può giungere rapidamente a disegnare il suo grafico.

16/10/17

$\boxed{g(x) = f(x) \pm k}$ $\boxed{k \geq 0}$

$\text{graf } f = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom} f, y = f(x)\}$
$= \{(x, f(x)) : x \in \text{dom} f\}$

$\text{dom} g = \text{dom} f$

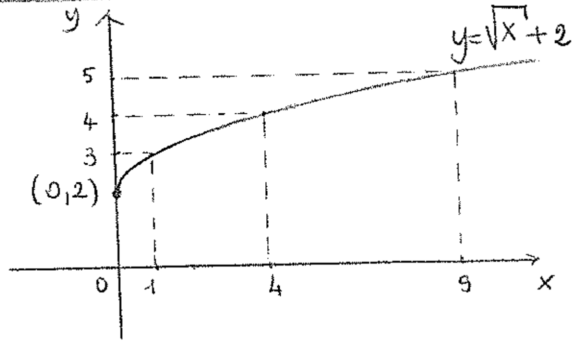
$\text{graf } g = \{(x, f(x) \pm k) : x \in \text{dom} f\}$

graf g = graf f SPOSTATO in alto di k (se $+k$) o in basso di k (se $-k$).

ES. $g(x) = \sqrt{x} + 2$ $\quad \text{dom} g = [0, +\infty[$

$x=0 \quad (0,2)$
$x=1 \quad (1,3)$
$x=4 \quad (4,4)$
$x=9 \quad (9,5)$

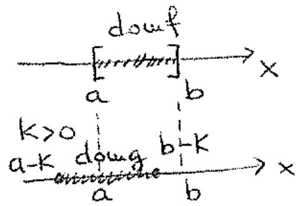
graf g $\quad y = \sqrt{x} + 2$



$\boxed{g(x) = f(x \pm k)}$ $\boxed{k \geq 0}$

$\text{dom} g = \{x \in \mathbb{R} : x \pm k \in \text{dom} f\}$

dom g è il dom f SPOSTATO a SINISTRA di k (se $+$) e a DESTRA di k (se $-$)



OSS. Se $\text{dom} f = \mathbb{R} \to \text{dom} g = \mathbb{R}$

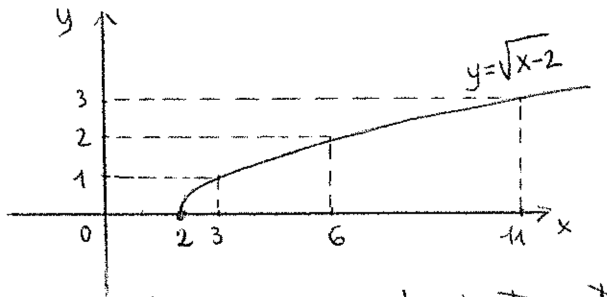
$\text{graf } g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x \in \text{dom} g, y = f(x \pm k)\}$

quindi anche il grafico di g è ottenuto spostando il grafico di f a SINISTRA di k (se $+$) o a DESTRA di k (se $-$).

ES. $g(x) = \sqrt{x-2}$ $\quad \text{dom} g = [2, +\infty[$ $\to$ a destra di 2 rispetto al $\text{dom} f = [0, +\infty[$

$g(x) = \sqrt{x-k}$ con $k=2$ e $f(x) = \sqrt{x}$
$= f(x-k)$

Anche il grafico si ottiene spostando il graf f a DESTRA di 2.

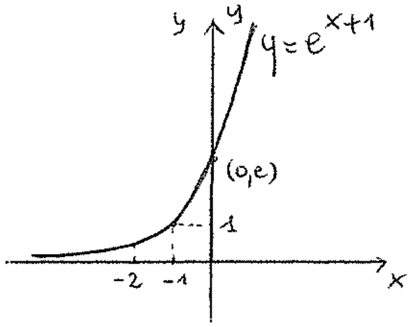


ES. $g(x) = e^{x+1}$ $\quad \text{dom} g = \mathbb{R}$ quindi il dominio non ci aiuta a capire lo spostamento

$g(x) = f(x+1)$
con $f(x) = e^x$, $k=1$

grafico $g = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = e^{x+1}\}$ il grafico di g si ottiene spostando il grafico di f a SINISTRA di 1.

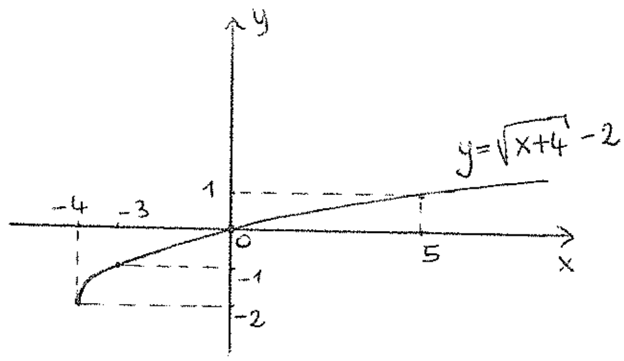
Infatti $g(-1) = e^0 = 1 \quad g(-2) = \frac{1}{e}$
$g(0) = e^1 = e$



Naturalmente entrambi gli spostamenti possono essere considerati insieme:

ES. $g(x) = -2+\sqrt{x+4}$ $\quad dom\,g = [-4,+\infty[$ a SINISTRA di 4 rispetto al $dom\,f$ con $f(x)=\sqrt{x}$

graf g: $y=-2+\sqrt{x+4}$ è il grafico della RADICE $y=\sqrt{x}$ spostato a SINISTRA di 4 e in BASSO di 2.



Serve dove $y=-2+\sqrt{x+4}$ ∩ asse x:

$0=-2+\sqrt{x+4} \iff \sqrt{x+4}=2 \iff \begin{cases} x+4\geq 0 \\ 2\geq 0 \\ x+4=4 \end{cases}$

$\iff \boxed{x=0}$

$x=-4 \quad y=-2 \quad x=-3 \quad y=-1$

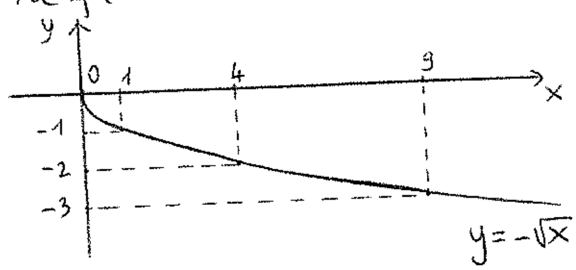
$x=0 \quad y=0 \quad x=5 \quad y=1$

$\boxed{g(x)=-f(x)}$ $\quad dom\,g = dom\,f \quad graf\,g = \{(x,-f(x)) : x\in dom\,f\}$

$y=-f(x)$ contiene tutti i punti del grafico di f con la y cambiata di segno - graf g è il SIMMETRICO del graf f rispetto all'asse x

ES. $g(x) = -\sqrt{x}$ $\quad dom\,g = [0,+\infty[= dom\,f$ se $f(x)=\sqrt{x}$

$g(0)=0 \quad g(1)=-1 \quad g(4)=-2$ ecc.



$\boxed{g(x)=f(-x)}$

Def. Sia $A\subset\mathbb{R}$ un insieme - Si dice INSIEME OPPOSTO di A l'insieme $-A=\{-x : x\in A\}$ -

$-A$ è l'insieme SIMMETRICO di A rispetto all'origine -

$dom\,g = \{x\in\mathbb{R} : -x\in dom\,f\} = \{-x : x\in dom\,f\} = -dom\,f$

Quindi dom g è l'insieme SIMMETRICO del dom f rispetto all'ORIGINE -

Poiché la funzione g in ogni x vale quanto la funzione f nell'opposto di x, allora il grafico di g risulta il SIMMETRICO del grafico di f RISPETTO all'asse y.

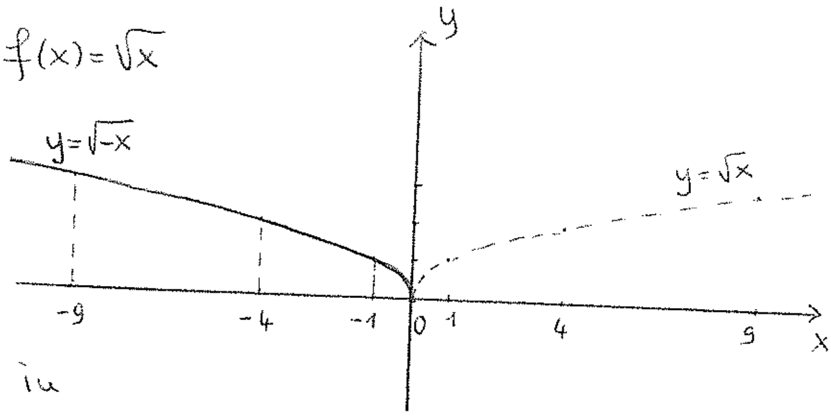
ES. $g(x)=\sqrt{-x}$ dom $g=\{x\in\mathbb{R}: -x\geq 0\}=]-\infty,0]$

in ogni $x\leq 0$ $g(x)=f(-x)$ con $f(x)=\sqrt{x}$

$g(0)=0$ $g(-1)=\sqrt{1}=1$

$g(-4)=\sqrt{4}=2$

$g(-9)=\sqrt{9}=3$ ecc.



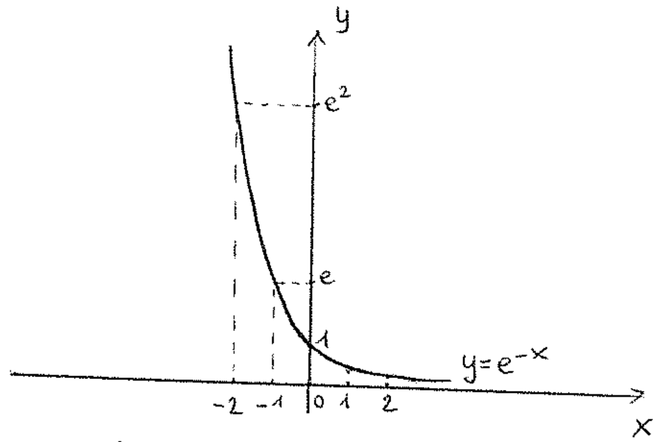
ES. $g(x)=e^{-x}$ dom $g=\mathbb{R}$, quindi in questo caso dom g non fornisce informazioni, $g(x)=f(-x)$ con $f(x)=e^x$
Tuttavia g associa ai numeri $x\leq 0$ il valore di f nel punto ≥ 0 corrispondente e viceversa

$g(0)=e^{-0}=e^0=1$ $g(1)=e^{-1}=\frac{1}{e}$

$g(-1)=e^1=e$ $g(2)=e^{-2}$

$g(-2)=e^2$ ecc.

Quindi $y=e^{-x}$ è il simmetrico di $y=e^x$ rispetto all'asse y



Def. Sia $A\subset\mathbb{R}$ un insieme SIMMETRICO rispetto all'origine (cioè $\forall x\in A$ $-x\in A$). Una funzione $f:A\to\mathbb{R}$ si dice PARI se

$$\forall x\in A \quad f(-x)=f(x)$$

cioè se il suo grafico risulta SIMMETRICO rispetto all'asse y.

ES. $f(x)=x^2$ è PARI su $\mathbb{R}$: $f(-x)=(-x)^2=x^2=f(x)$
e anche il grafico $y=x^2$ è simmetrico rispetto all'asse y

Invece $f:A\to\mathbb{R}$ si dice DISPARI se

$$\forall x\in A \quad f(-x)=-f(x)$$

cioè se il suo grafico è SIMMETRICO rispetto all'origine.

ES. $f(x)=x^3$ è DISPARI su $\mathbb{R}$: $f(-x)=(-x)^3=-x^3=-f(x)$
e il grafico $y=x^3$ è infatti simmetrico rispetto all'origine.

ES. $f(x)=\frac{1}{x}$ su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è DISPARI, mentre $f(x)=\frac{1}{x^2}$ su $\mathbb{R}\setminus\{0\}$ è PARI.

16/10/17

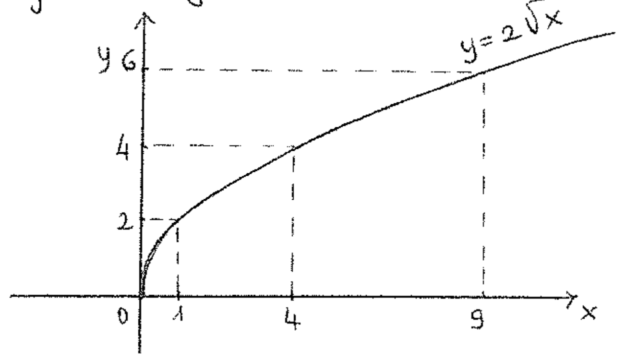
$\boxed{g(x) = k f(x)}$ $k>0$ $\text{dom}\, g = \text{dom}\, f$

$\text{graf}\, g = \{(x, kf(x)) : x \in \text{dom}\, f\}$ quindi è l'insieme di tutti i punti del grafico di f con y moltiplicata per k.

ES. $g(x) = 2\sqrt{x}$ $\text{dom}\, g = [0,+\infty[$ l'immagine di ogni x è il doppio dell'immagine tramite $f(x) = \sqrt{x}$

$g(0) = 0$ $g(1) = 2$ $g(4) = 4$

$g(9) = 6$ ecc.



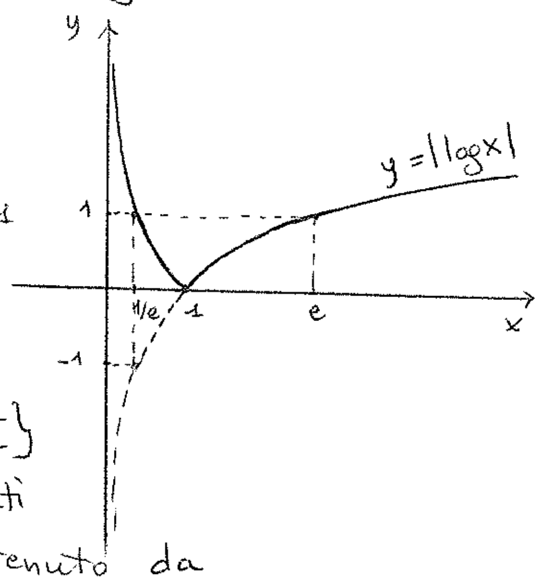
$\boxed{g(x) = |f(x)|}$ $\text{dom}\, g = \text{dom}\, f$

$$g(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } f(x) \geq 0 \\ -f(x) & \text{se } f(x) < 0 \end{cases}$$

Quindi il grafico di g coincide con il grafico di f dove $y \geq 0$, mentre coincide con il suo opposto quando $y < 0$.

ES. $g(x) = |\log x|$ $\text{dom}\, g =]0,+\infty[$

$$g(x) = \begin{cases} \log x & \text{se } \log x \geq 0 \\ -\log x & \text{se } \log x < 0 \end{cases} = \begin{cases} \log x & x \geq 1 \\ -\log x & 0 < x < 1 \end{cases}$$



$\boxed{g(x) = f(|x|)}$ $\text{dom}\, g = \{x \in \mathbb{R} : |x| \in \text{dom}\, f\} =$

$= \{\pm x : x \in \text{dom}\, f \cap [0,+\infty[\}$

Se $\text{dom}\, f \cap [0,+\infty[= \emptyset \Rightarrow \text{dom}\, g = \emptyset$. Altrimenti il $\text{dom}\, g$ è un INSIEME SIMMETRICO ottenuto da

$$\text{dom}\, g = (\text{dom}\, f \cap [0,+\infty[) \cup (-(\text{dom}\, f \cap [0,+\infty[)).$$

Il $\text{dom}\, g$ si ottiene considerando solo la parte di $\text{dom}\, f \cap [0,+\infty[$ cui si deve unire il suo opposto.

Per quanto riguarda il grafico di g contano solo i valori di f su $[0,+\infty[$: $\text{graf}\, g$ $y = f(|x|) = \begin{cases} f(x) & x \geq 0 \\ f(-x) & x < 0 \end{cases}$ quindi il $\text{graf}\, g$ coincide con il grafico di f se $x \geq 0$ e con il suo simmetrico rispetto all'asse y se $x<0$.

Per disegnarlo basta conservare il graff dove $x \geq 0$, cancellare tutto il resto e simmetrizzare rispetto all'asse y quanto rimasto.

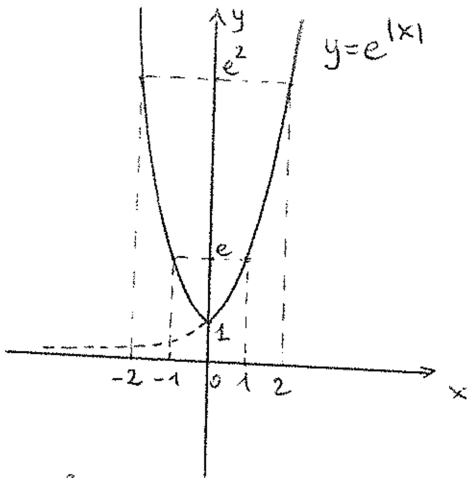
ES. $f(x) = e^{|x|} = \begin{cases} e^{x} & x \geq 0 \\ e^{-x} & x<0 \end{cases}$

$\mathrm{dom} f = \mathbb{R}$

$x=0 \quad y=1$

$x=\pm 1 \quad y=e$

$x=\pm 2 \quad y=e^2$ ecc.



ES. $f(x) = \log|x| \quad \mathrm{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : |x|>0\} = \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\log|x| = \begin{cases} \log x & x>0 \\ \log(-x) & x<0 \end{cases}$

$x=\pm 1 \quad y=0$

$x=\pm \frac{1}{e} \quad y=-1$

$x=\pm e \quad y=1$