ELEMENTI di MATEMATICA - Prof.ssa A. Coscia

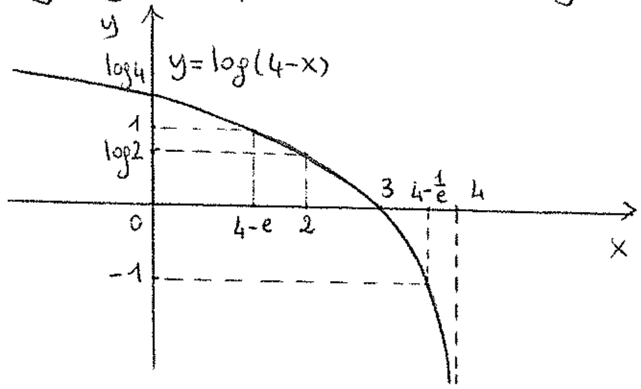
11^a lezione, 19 ottobre 2017

ES. $f(x) = \log(4-x)$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \{x \in \mathbb{R} : 4-x>0\} =]-\infty, 4[$

grafico $y = \log(4-x) = \log(-(x-4))$: si tratta del grafico

$y = \log(-x)$ (simmetrico del logaritmo $y=\log x$ rispetto all'asse delle y)

spostato a destra di 4

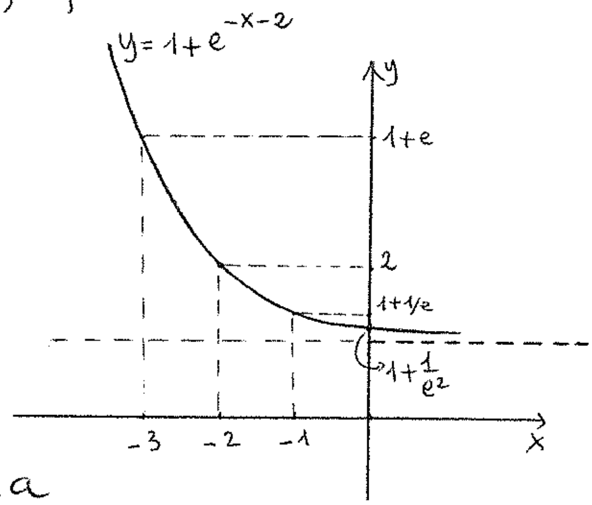


$y(3) = \log 1 = 0$ $\quad$ $y(2) = \log 2 \approx 0{,}69$ $\quad$ $y(0) = \log 4 \approx 1{,}39$

$y(4-e) = 1$ $\quad$ $y(4-\frac{1}{e}) = -1$
$4-e \approx 1{,}28$ $\quad$ $4-\frac{1}{e} \approx 3{,}63$

ES. $f(x) = 1 + e^{-x-2}$ $\quad$ $\operatorname{dom} f = \mathbb{R}$

grafico $y = 1 + e^{-x-2} = 1 + e^{-(x+2)}$: si tratta del grafico di e^{-x} (simmetrico di $y = e^x$ rispetto all'asse y) spostato a sinistra di 2 e in alto di 1.



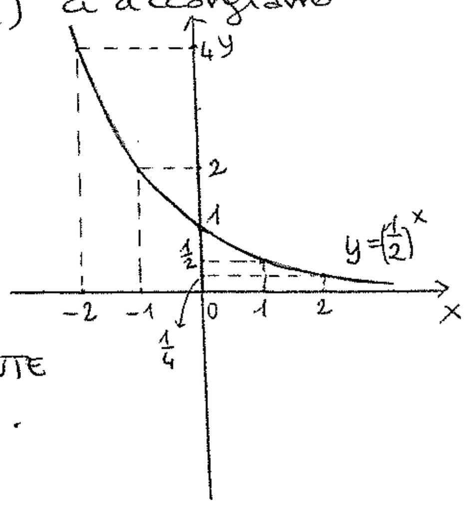
$y(-2) = 2$ $\quad$ $y(-1) = 1 + \frac{1}{e}$ $\quad$ $y(0) = 1 + \frac{1}{e^2}$

$y(-3) = 1+e$

FUNZIONE ESPONENZIALE a^x
con $0<a<1$ e LOGARITMO in base a

Se consideriamo ad es. $a = \frac{1}{2}$ e $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x$ ci accorgiamo subito che la funzione è decrescente:

$\left(\frac{1}{2}\right)^0 = 1$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^1 = \frac{1}{2}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4}$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-1} = 2$ $\quad$ $\left(\frac{1}{2}\right)^{-2} = 4$ ecc.



In realtà $f(x) = \left(\frac{1}{2}\right)^x = 2^{-x}$ quindi il grafico è il simmetrico di $y = 2^x$ rispetto all'asse y

e $\underset{0<a<1}{a^x} : \mathbb{R} \to]0, +\infty[$ è BIUNIVOCA e STRETTAMENTE DECRESCENTE.

Pertanto a^x ammette FUNZIONE INVERSA

19/10/17

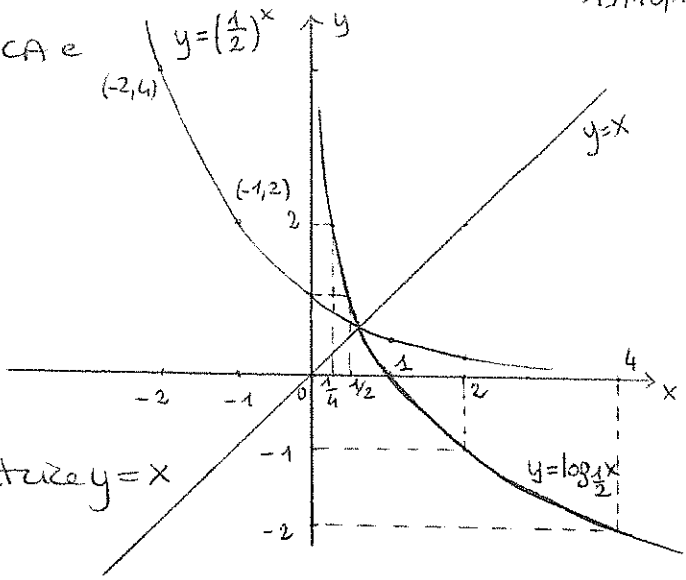
$\log_a x :]0,+\infty[\to \mathbb{R}$ BIUNIVOCA e STRETTAMENTE DECRESCENTE.

Quindi se $0<a<1$

$\Rightarrow$ $\log_a x < 0 \iff x>1$

$\log_a x > 0 \iff 0<x<1$

Il grafico è l'insieme simmetrico del grafico $y=a^x$ rispetto alla bisettrice $y=x$



Si nota allora che $y=\log_{\frac{1}{2}} x$ è il simmetrico rispetto all'asse x di $y=\log_2 x$, cioè $y=\log_{\frac{1}{2}} x = -\log_2 x$. Questa proprietà vale indipendentemente dalla base a:

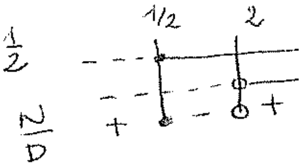
$\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x$ (si veda a pag. 5)

DOMINIO di una FUNZIONE

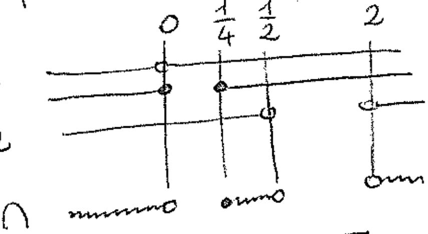
ES. $f(x)=\dfrac{1}{x^2}\sqrt{4x^2-x}+\log\left(\dfrac{2x-1}{x-2}\right)$

$$\operatorname{dom} f = \begin{cases} x^2 \neq 0 \\ 4x^2-x \geq 0 \\ \dfrac{2x-1}{x-2} > 0 \\ x-2 \neq 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x \neq 0 \\ x(4x-1) \geq 0 \\ N \geq 0 \quad 2x-1 \geq 0 \quad x \geq \frac{1}{2} \\ D>0 \quad x>2 \end{cases}$$

$x \leq 0$ o $x \geq \frac{1}{4}$



$$\begin{cases} x \neq 0 \\ x \leq 0 \text{ o } x \geq \frac{1}{4} \\ x < \frac{1}{2} \text{ o } x > 2 \\ (x \neq 2) \end{cases}$$



$\operatorname{dom} f =]-\infty,0[\cup [\frac{1}{4},\frac{1}{2}[\cup]2,+\infty[$

EQUAZIONI ESPONENZIALI

$\boxed{a^x=b}$ $\quad b\leq 0$ nessuna sol.^{ne}

$a>0, a\neq 1$ $\quad b>0$ 1 sola sol.^{ne} perché $f(x)=a^x$ è INIETTIVA (è BIUNIVOCA)

Si deve scrivere $b=a^y$, poi

$$\boxed{a^x=a^y \iff x=y}$$

$\downarrow$

BIUNIVOCA

ES. $3^x = 81 \qquad 3^x = 3^4 \iff x = 4$

$e^x = 0$ nessuna sol.ne

$10^x = \frac{1}{1000} \qquad 10^x = 10^{-3} \iff x = -3$

$4^x = -2$ nessuna sol.ne

$\left(\frac{1}{2}\right)^x = 8 \qquad \left(\frac{1}{2}\right)^x = \left(\frac{1}{2}\right)^{-3} \iff x = -3$

$25 \cdot 5^{3x} = 5^{1-4x} \qquad 5^2 \cdot 5^{3x} = 5^{1-4x} \iff 5^{2+3x} = 5^{1-4x} \iff 2+3x = 1-4x$
$\iff x = -\frac{1}{7}$

$e \cdot e^{x^2} = \frac{e^{2x^2}}{e^3} \qquad e^{1+x^2} = e^{2x^2-3} \iff 1+x^2 = 2x^2-3 \iff$
$x^2 = 4 \iff x = \pm 2$

$(4^x)^3 = \frac{1}{16} \qquad 4^{3x} = 4^{-2} \iff 3x = -2 \iff x = -\frac{2}{3}$

DISEQUAZIONI ESPONENZIALI

$\boxed{a^x \geq b}$ se $b \leq 0 \Rightarrow$ sol.ni $\forall x \in \mathbb{R}$

$\boxed{a^x \leq b}$ se $b \leq 0 \Rightarrow$ nessuna sol.ne

In tutti gli altri casi scrivere $b = a^y$ e

$\boxed{a^x \leq a^y} \iff x \leq y$ se $a > 1$ (a^x è STRETT. CRESC. per $a > 1$)
$x \geq y$ se $0 < a < 1$ (a^x è STRETT. DECRESC. per $a < 1$)

$32^x > 128 \iff 2^{5x} > 2^7 \underset{2^x \nearrow}{\iff} 5x > 7 \iff x > \frac{7}{5}$

$\left(\frac{1}{8}\right)^x > \frac{1}{4} \iff \left(\frac{1}{2}\right)^{3x} > \left(\frac{1}{2}\right)^2 \underset{\left(\frac{1}{2}\right)^x \searrow}{\iff} 3x < 2 \iff x < \frac{2}{3}$

$10^x < -2$ nessuna sol.ne

$e^{3x^2-1} < e^{x^2-x} \underset{e^x \nearrow}{\iff} 3x^2-1 < x^2-x \iff 2x^2+x-1 < 0 \iff x \in]-1, \frac{1}{2}[$

$x_{1,2} = \frac{-1 \pm 3}{4} = \begin{matrix} -1 \\ \frac{1}{2} \end{matrix}$

$3^x > -1 \quad \forall x \in \mathbb{R}$

19/10/17

$$e^{25x^2+20x+4}>1 \iff e^{25x^2+20x+4}>e^0 \underset{e^x\nearrow}{\iff}$$

$$25x^2+20x+4>0 \iff (5x+2)^2>0 \iff \forall x \neq -\frac{2}{5}$$

LOGARITMI

Proprietà
(1) $\log_a x$ è DEFINITO solo se $\underline{x>0}$

(2) $\log_a a^x = x \quad \underline{\forall x} \qquad \log_a a = 1,\ \log_a 1 = 0 \quad \underline{\forall a>0, a\neq 1}$

(3) $a^{\log_a x} = x \quad \underline{\forall x>0}$

(4) $\log_a x = b \iff x = a^b$ (Definizione di logaritmo)

(5) $\log_a x + \log_a y = \log_a(xy) \qquad \underline{\forall x,y>0}$

(6) $\log_a \frac{1}{x} = -\log_a x \qquad \forall \underline{x>0}$

(7) $\log_a x - \log_a y = \log_a\left(\frac{x}{y}\right) \qquad \forall x,y>0$

(8) $\log_a x^\alpha = \alpha \log_a x \qquad \forall x>0 \ \forall \alpha \in \mathbb{R}$

__ES.__ $\underbrace{\log_2 6 + \log_2 \frac{8}{3}} + \underbrace{\log_3 45 - \log_3 5} =$

$\log_2\left(6\cdot\frac{8}{3}\right) + \log_3\left(\frac{45}{5}\right) = \log_2 16 + \log_3 9 = 4+2 = 6$

$\log\sqrt{2} = \log 2^{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}\log 2$

$e^x = 3 \iff e^x \underset{(3)}{=} e^{\log 3} \iff x = \log 3$

$\log \ldots = 3$ cerco x : $\log x = 3 \underset{(4)}{\iff} x = e^3$ $\boxed{\log \overset{3}{\underset{\ldots}{e}} = 3}$

oppure direttamente (2)

$2^{-\log_2 5} = \frac{1}{2^{\log_2 5}} = \frac{1}{5}$

$\log e^{\cdots} = -1 \qquad \log e^{-1} = -1$ per (2)

$e^{\log(-3)} = \nexists$ (NON ESISTE $\log(N°<0)$)

$e^{\log(x-2)+\log(3x)} \underset{(5)}{=} e^{\log(3x(x-2))} \underset{(3)}{=} 3x(x-2) = 3x^2-6x \quad \underline{\forall x>2}$

C.E. $\begin{cases} x-2>0 \\ 3x>0 \end{cases} \begin{cases} x>2 \\ x>0 \end{cases} \boxed{x>2}$

19/10/17

CAMBIAMENTO di BASE

$$\boxed{\log_a x = \frac{\log_b x}{\log_b a}}$$

a = base vecchia
b = base nuova

es. $\log_2 3 \cdot \log_3 4 = \cancel{\log_2 3} \cdot \frac{\log_2 4}{\cancel{\log_2 3}} = \log_2 4 = 2$

$\log_3 4 = \frac{\log_2 4}{\log_2 3}$

<u>OSS.</u> Si ritrova che $\boxed{\log_{\frac{1}{a}} x = -\log_a x}$ $\forall a>0, a\neq 1$.

Infatti $\log_{\frac{1}{a}} x = \frac{\log_a x}{\log_a \frac{1}{a}} = -\log_a x$.

$\log_a \frac{1}{a} \to \log_a a^{-1} = -1$

EQUAZIONI LOGARITMICHE

$\boxed{\log_a x = b}$ $a>0, a\neq 1, x>0$ ammette sempre 1 SOLA sol.^{ne}

es. $\log_4 x = 3 \iff x = 4^3 = 64$

$\log_{10} x = -2 \iff x = 10^{-2} = \frac{1}{100}$

$\log x = 1 \iff x = e^1 = e$

$\boxed{\log_a x = \log_a y} \iff x = y$

C.E. $x>0$
$y>0$

$\log_a x$ è <u>BIUNIVOCA</u>

DISEQUAZIONI LOGARITMICHE

$\boxed{\log_a x \geq \log_a y} \iff x \geq y$ se $a>1$ ($\log_a x$ è STRETTAMENTE CRESCENTE per $a>1$)

$x \leq y$ se $0<a<1$ ($\log_a x$ è STRETTAM. DECRESCENTE per $0<a<1$)

ES. $\log_3 x > 2 \iff \log_3 x > \log_3 9 = 2$ Ricordare che $\boxed{\forall b \quad b = \log_a a^b}$

C.E. $x>0$

$\iff x > 9$ ($\log_e \nearrow$)

Sol.^{ni} $\begin{cases} x>9 \\ x>0 \end{cases}$ $x>9$

$\log_{10} x < 3 \iff \log_{10} x < \log_{10} 1000 \iff x < 1000$

C.E. $x>0$

Sol.^{ni} $0 < x < 1000$ ($x \in]0, 1000[$)

19/10/17

$\log x < -1 \iff \log x < \log e^{-1} = \log \frac{1}{e} \iff x < \frac{1}{e}$

C.E. $x > 0$

Sol.^{ni} $0 < x < \frac{1}{e}$

$\log(2x^2 - 12) < \log(-5x)$

C.E. $\begin{cases} 2x^2 - 12 > 0 \\ -5x > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x^2 > 6 \\ x < 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x < -\sqrt{6} \text{ o } x > \sqrt{6} \\ x < 0 \end{cases}$

$\Updownarrow$ $\log_e \nearrow$

C.E. $x \in]-\infty, -\sqrt{6}[$

$2x^2 - 12 < -5x$

$\Updownarrow$

$2x^2 + 5x - 12 < 0 \iff x \in]-4, \frac{3}{2}[$

$$x_{1,2} = \frac{-5 \pm \sqrt{25+96}}{4} = \frac{-5 \pm 11}{4} = \begin{matrix} \nearrow -4 \\ \searrow \frac{3}{2} \end{matrix}$$

$\cap$ con $]-\infty, -\sqrt{6}[$ essendo $-4 < -\sqrt{6} < \frac{3}{2}$ $\quad (2 < \sqrt{6} < 3)$

si ottiene Sol.^{ni} $x \in]-4, -\sqrt{6}[$

$\log x^2 > 0$ C.E. $x^2 > 0$ $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$

$\Updownarrow$

$\log x^2 > \log 1 \underset{\log \nearrow}{\iff} x^2 > 1 \iff x < -1 \text{ o } x > 1$

Tenendo conto del C.E. Sol.^{ni} $x \in]-\infty, -1[\cup]1, +\infty[$.

GRAFICO delle FUNZIONI senx e cosx

19/10/17

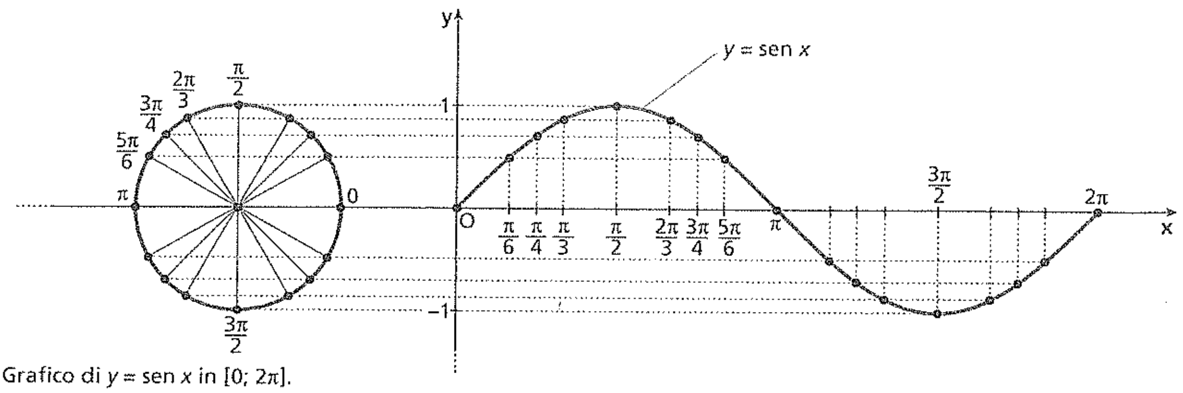


Grafico di $y = \text{sen}\, x$ in $[0; 2\pi]$.

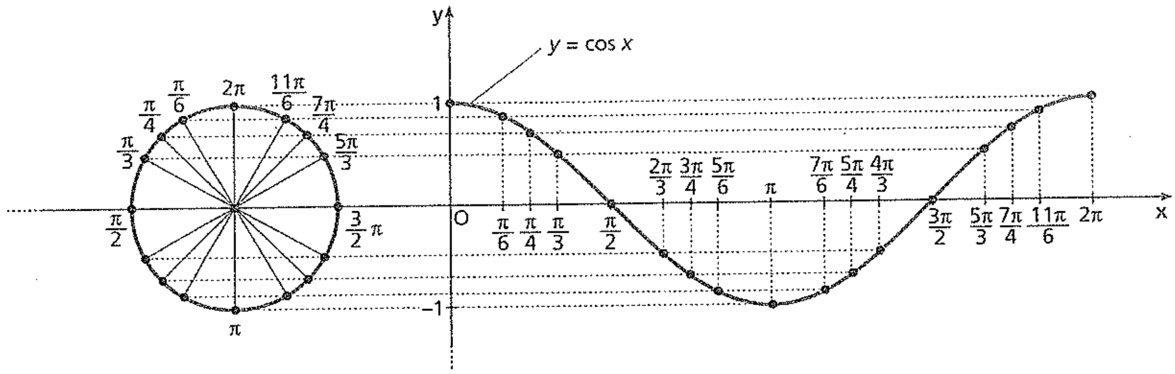
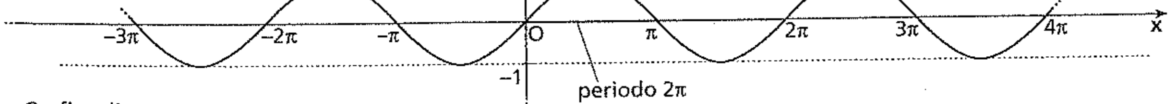


Grafico di $y = \cos x$ in $[0; 2\pi]$.

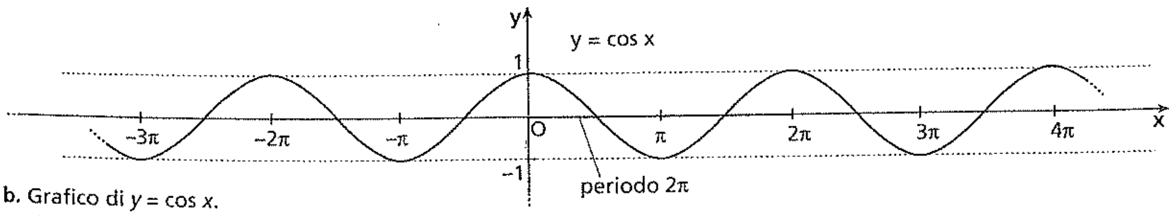
Abbiamo già visto che se l'angolo $x<0$ oppure $\geq 2\pi$ le funzioni seno e coseno assumono di nuovo gli stessi valori del punto corrispondente sul cerchio goniometrico con $0 \leq x < 2\pi$. Quindi le funzioni senx e cosx sono PERIODICHE di periodo $T = 2\pi$ e possiamo scrivere

$$\text{sen}(x+2k\pi) = \text{sen}\, x \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$
$$\cos(x+2k\pi) = \cos x \qquad \forall k \in \mathbb{Z} \ \ \forall x \in \mathbb{R}$$

La funzione senx è DISPARI ($\text{sen}(-x) = -\text{sen}\, x$ → grafico simmetrico rispetto all'origine), mentre cosx è PARI ($\cos(-x) = \cos x$ → grafico simmetrico rispetto all'asse y).



a. Grafico di $y = \text{sen}\, x$.



b. Grafico di $y = \cos x$.