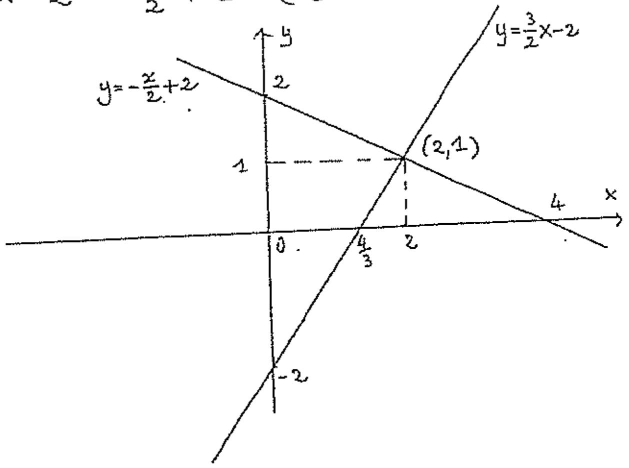
# SOLUZIONI Parte 3



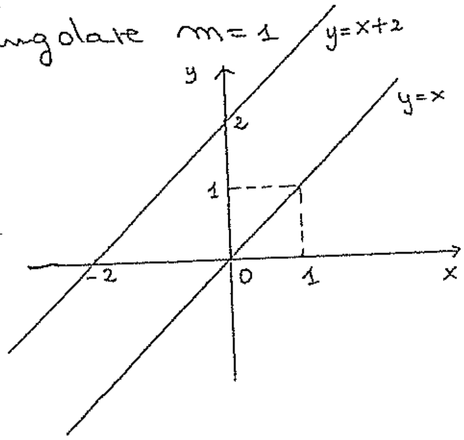
90) a) $y=\frac{3}{2}x-2$ $\quad y=-\frac{x}{2}+2$ non sono parallele (i coeff. angolari sono $\frac{3}{2}$ e $-\frac{1}{2}$)

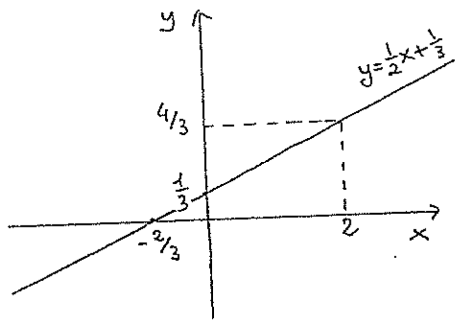
$$\begin{cases} y=\frac{3}{2}x-2 \\ y=-\frac{x}{2}+2 \end{cases} \quad \begin{cases} y=\dots \\ \frac{3}{2}x-2=-\frac{x}{2}+2 \end{cases} \quad \begin{cases} x=2 \\ y=1 \end{cases}$$

P.to di intersezione $(2,1)$




b) $y=x$ $\quad y=x+2$ sono parallele perchè entrambe hanno coeff. angolare $m=1$



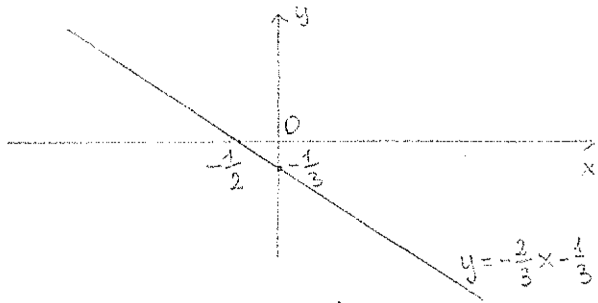

c) $y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ $\quad y=\frac{1}{2}x+\frac{1}{3}$ sono la stessa retta

2° quesito escludiamo a) e b) perchè dall'inclinazione della retta il coefficiente angolare è $>0$.
Su $x=0$ poi è $y>0$ quindi escludiamo d)
Allora è $y=2x+1$ e i punti di intersezione con gli assi nel disegno sono allora $(0,1)$ e $(-\frac{1}{2},0)$.

3° quesito La retta a) corrisponde al 2° disegno ($\underset{m>0}{m=1}$, $q=-1$, se $x=1 \downarrow y=0$),
la retta c) al 1° disegno ($\underset{m<0}{m=-1}$, $q=3$, se $x=3 \rightarrow y=0$)
la retta d) al 3° disegno ($\underset{m>0}{m=\frac{1}{2}}$, $q=1$, se $x=-2 \rightarrow y=0$)
la retta b non ha disegno

91) $y=-\frac{2}{3}x-\frac{1}{3}$ i) $3y=-2x+1$ $y=-\frac{2}{3}x+\frac{1}{3}$ coeff. ang. $m=-\frac{2}{3}$

V sono parallele




ii) F perché il coeff. ang. è $<0$
e non interseca neppure il semiasse
positivo delle ascisse

iii) $y=\frac{3}{2}x+7$ le rette perpendicolari ad una retta data di coeff. ang. $m$
hanno coeff. ang. $-\frac{1}{m}$

r ha coeff. ang $-\frac{2}{3}$ : le rette $\perp r$ hanno coeff. ang. $-\frac{1}{-\frac{2}{3}}=\frac{3}{2}$

V

iv) F

92) i) $x=3$ rette parallele $x=k$ $(k\in\mathbb{R}, k\neq 3)$ ad es. $x=0, x=2$

rette perpendicolari $y=k$ $(k\in\mathbb{R})$ ad es. $y=0$, $y=-1$, $y=3$

ii) $y=4x+1$ rette parallele coeff. ang 4 $y=4x+k$ $(k\in\mathbb{R}, k\neq 1)$

ad es. $y=4x-3$, $y=4x+2$ ecc.

rette perpendicolari coeff. ang. $-\frac{1}{4}$ $y=-\frac{1}{4}x+k$ $(k\in\mathbb{R})$

ad es. $y=-\frac{1}{4}x$, $y=-\frac{1}{4}x+2$ ecc.

iii) $y=\frac{4}{5}$ rette parallele $y=k$ $(k\in\mathbb{R}, k\neq\frac{4}{5})$ ad es. $y=-1$, $y=2$

rette perpendicolari $x=k$ $(k\in\mathbb{R})$ ad es. $x=-2$, $x=1$

93) $P(2,6)$

i) $y-6=m(x-2)$ $y=mx-2m+6$ $(m\in\mathbb{R})$

retta orizzontale e rette oblique

$x=2$ retta verticale

ii) $y=3x$ iii) $y=6$

iv) $y=3x+q$ deve passare per $P \Rightarrow 6=6+q$ $q=0$

$y=3x$ (si poteva dedurre anche subito da ii) )

v) $x=2$

94) $y=-\frac{1}{2}x-\frac{25}{4}$ rette $\perp$ $y=2x+q$ per $(-2,3)$ $3=-4+q$

$q=7$ RETTA $r$ : $y=2x+7$

$y=3x-56$ rette // $y=3x+q$ per $(3,3)$ $3=9+q$

$q=-6$ RETTA $s$ : $y=3x-6$

$s\cap r$ $\begin{cases} y=2x+7 \\ y=3x-6 \end{cases}$ $\begin{cases} y=\dots \\ 2x+7=3x-6 \end{cases}$ $\begin{cases} x=13 \\ y=33 \end{cases}$ $(13,33)\ Q$

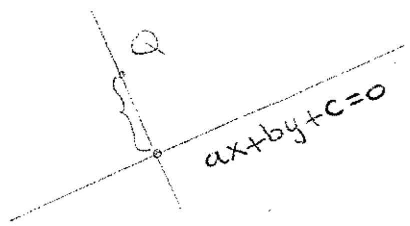
$\mathrm{dist}(Q,O)=\sqrt{13^2+33^2}=\sqrt{169+1089}=\sqrt{1258}$ $(1258=2\cdot17\cdot37)$

$\mathrm{dist}(Q,\ x-2y-2=0)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}=\frac{|13-2\cdot33-2|}{\sqrt{1+4}}=\frac{55}{\sqrt5}=11\sqrt5$

$ax+by+c=0$ è l'eq.$^{ne}$ della retta

$Q(x_0,y_0)$

Se non ci si ricorda la formula si può procedere in qualche altro modo: ad es. la retta per $Q$ $\perp$ $y=\frac{x}{2}-1$ ha eq.$^{ne}$ $y=-2x+59$, intersecando $\begin{cases} y=\frac{x}{2}-1 \\ y=-2x+59 \end{cases}$ si ottiene il punto $(24,11)$ e $\mathrm{dist}(Q,(24,11))=11\sqrt5$

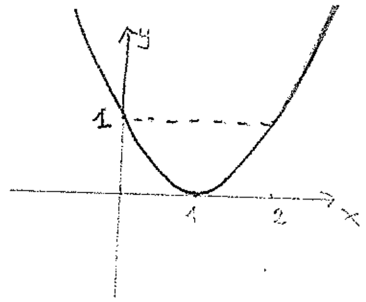



95) $y=2x^2+6$ i) $V(0,6)$ ii) $x=0$ asse $y$

iii) concavità verso l'alto

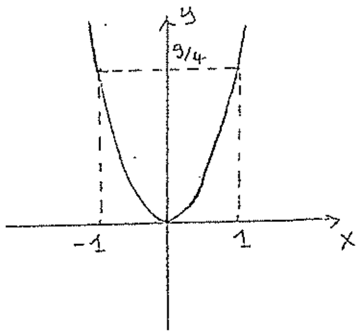
96) $y=(x-1)^2$ $V(1,0)$ verso l'alto

retta tang. $y=0$

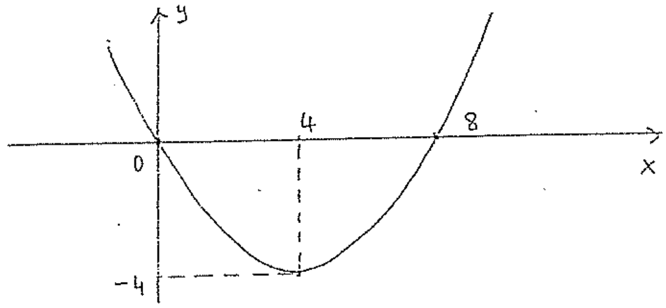


97)

a) $V(0,0)$

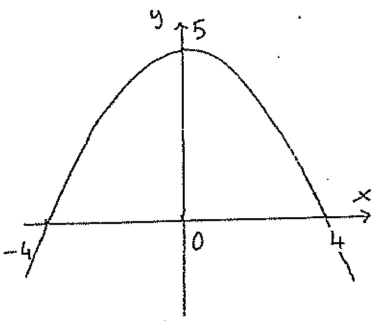



b) $V(4,-4)$ ∩ asse x $x=0$ $x=8$

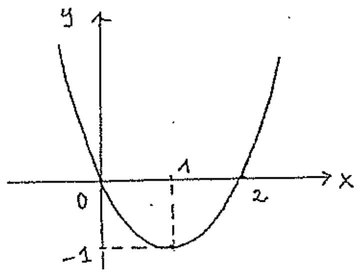




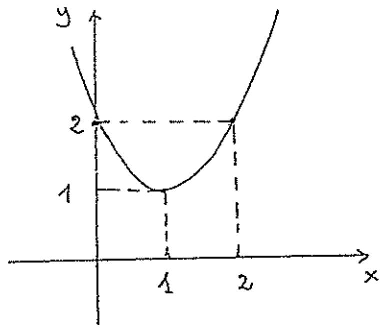

c) $V(0,5)$ rivolta verso il basso ∩ asse x $x=\pm 4$



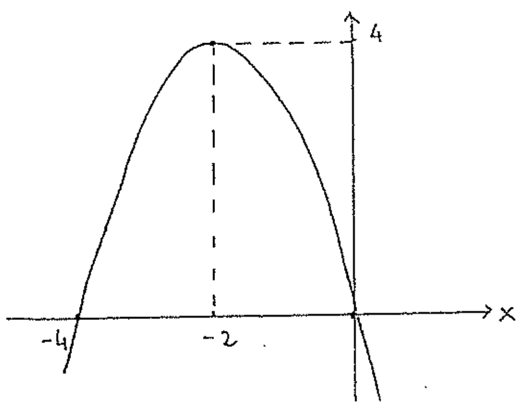

d) $V(1,-1)$ verso l'alto ∩ asse x $x=0,2$



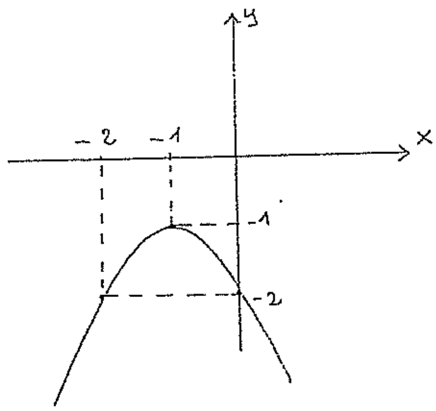

e) $V(1,1)$ verso l'alto no ∩ asse x




f) $V(-2,4)$ verso il basso ∩ asse x $x=0,-4$

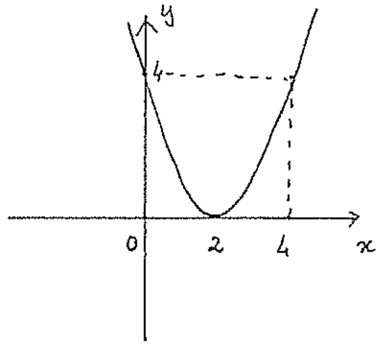



g) $V(-1,-1)$ verso il basso no ∩ asse x



h) $V(2,0)$ rivolta verso l'alto $\cap$ asse x : $x=2$

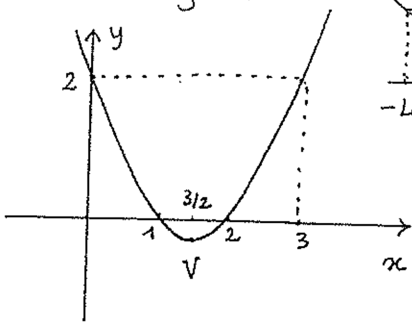
in $x=0 \to y=4$




i) $V\left(\frac{3}{2}, -\frac{1}{4}\right)$ rivolta verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=1$, $x=2$

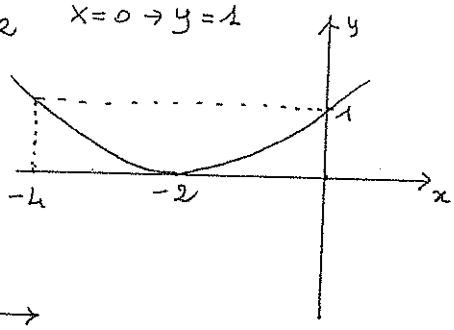
in $x=0$ $y=2$




j) $V(-2,0)$ verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=-2$

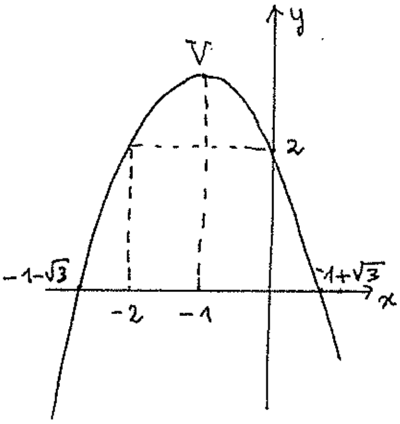
$x=0 \to y=1$




K) $V(-1,3)$ verso il basso

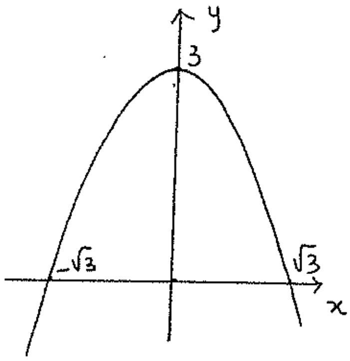
$\cap$ asse x : $x=-1\pm\sqrt{3}$

$x=0 \to y=2$




l) $V(0,3)$ verso il basso

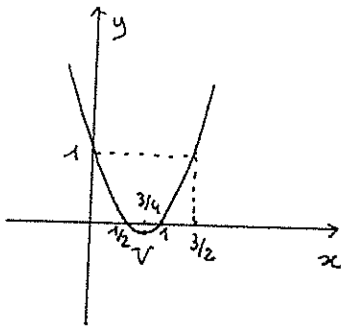
$\cap$ asse x : $x=\pm\sqrt{3}$




m) $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

$\cap$ asse x : $x=\frac{1}{2}$ $x=1$

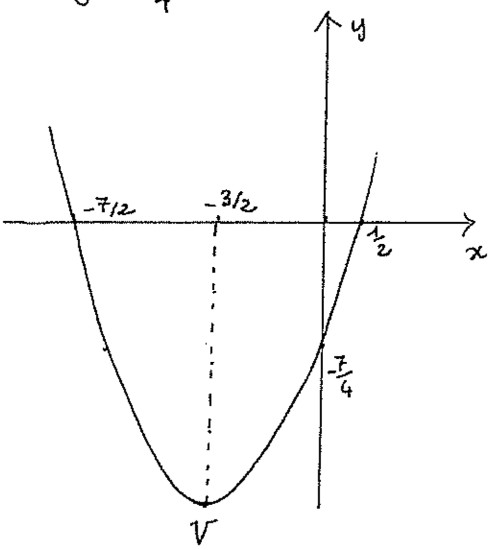
$x=0 \to y=1$




n) $V\left(-\frac{3}{2}, -4\right)$ verso l'alto

$\cap$ asse x : $x=-\frac{7}{2}$ $x=\frac{1}{2}$

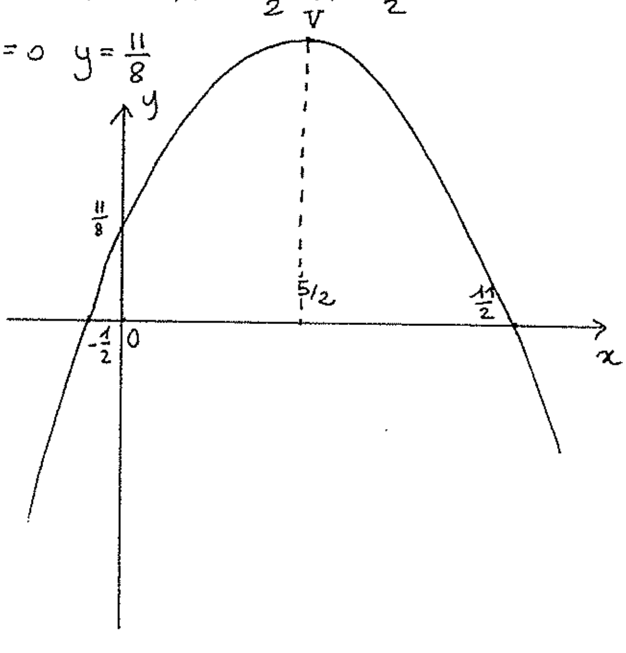
$x=0$ $y=-\frac{7}{4}$




o) $V\left(\frac{5}{2}, \frac{9}{2}\right)$ verso il basso

$\cap$ asse x : $x=-\frac{1}{2}$ $x=\frac{11}{2}$

$x=0$ $y=\frac{11}{8}$



98 ) $y = -x^2 + 7x - 6 \qquad V\left(\frac{7}{2}, \frac{25}{4}\right)$

99 ) $y = \frac{(2-x)^2}{4}$ perché il vertice è in $x = 2$ (allora escludiamo 2ª e 3ª) ma $y(0) = 1$ (quindi escludiamo la 1ª)

100 ) 1ª $V$ $x = \frac{1}{2}$ NO 2ª NO deve essere $y(x)$ non $x(y)$

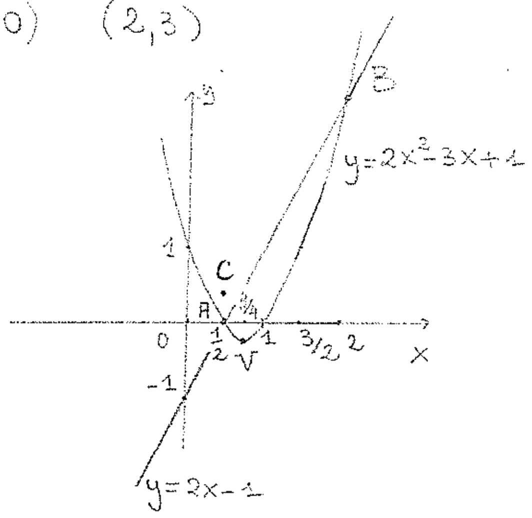
4ª $y(0) = -4$ NO $\Rightarrow y = x^2 + x - 2$

101 ) $y = 2x^2 - 3x + 1$ i) $2x^2 - 3x + 1 = 0$ $x = \frac{3 \pm \sqrt{9-8}}{4} = \frac{3 \pm 1}{4}$

$x_1 = 1 \quad x_2 = \frac{1}{2}$ VERO

ii) $\begin{cases} y = 2x - 1 \\ y = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases} \begin{cases} \dots \\ 2x - 1 = 2x^2 - 3x + 1 \end{cases} \begin{cases} \dots \\ 2x^2 - 5x + 2 = 0 \end{cases}$

$\begin{cases} x = \frac{1}{2} \text{ o } x = 2 \\ y = 2x - 1 \end{cases}$ INTERS. $\left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad (2, 3)$




Vero: hanno in comune B

iii) Vero

iv) parabola $V\left(\frac{3}{4}, -\frac{1}{8}\right)$

Falso: la tangente in A ha coeff. angolare negativo e la retta interseca la parabola in due punti distinti.

102) $y=ax^2+bx+c$ rappresenta una parabola

- se ci chiediamo in quali punti la parabola interseca l'asse x

ottenianmo $\begin{cases} y=0 \\ y=ax^2+bx+c \end{cases}$ $\begin{cases} y=0 \\ ax^2+bx+c=0 \end{cases}$ e siamo

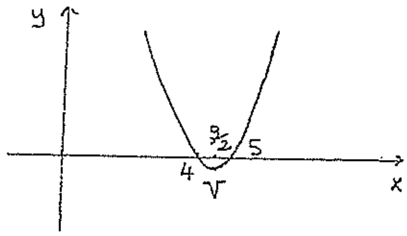
ricondotti ad un' eq.ne di 2° grado:

- se l' eq.ne ha 2 sol.ni reali e distinte $x_1, x_2$ ⇒ la parabola interseca l'asse x in due punti distinti $(x_1,0)$, $(x_2,0)$
- se l'eq.ne ha una sola sol.ne $x_1$ con molteplicità 2 ⇒ la parabola interseca l'asse x in un solo punto $(x_1,0)$ che è il vertice e la parabola risulta tangente all'asse x
- se l' eq.ne non ammette sol.ni reali ⇒ la parabola non interseca l'asse x e quindi è tutta al di sopra di $y=0$ se è rivolta verso l'alto, oppure tutta al di sotto se è rivolta verso il basso.

Viceversa, se abbiamo un'eq.$^{ne}$ di 2° grado $ax^2+bx+c=0$ possiamo considerare la parabola $y=ax^2+bx+c$ e i valori di x che risolvono l'eq.$^{ne}$ corrispondono alle ascisse dei punti in cui la parabola interseca l'asse x.

b) $x^2-9x+20=0$ parabola $y=x^2-9x+20$ $V\left(\frac{9}{2},-\frac{1}{4}\right)$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ 2 intersezioni con l'asse x (perchè $y_V<0$)



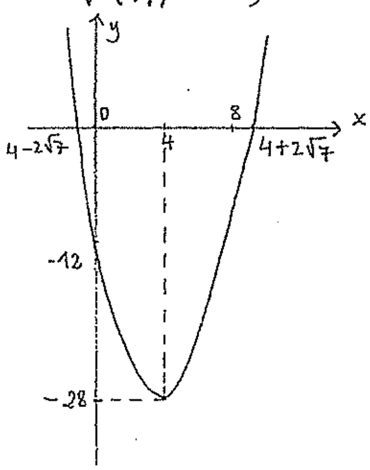

$$x=\frac{9\pm\sqrt{81-80}}{2}=\frac{9\pm1}{2}$$

$x_1=5$ $x_2=4$ $(4,0)$ $(5,0)$

SOL.$^{NI}$ EQ.$^{NE}$ $x=4, x=5$

i) $x^2-8x-12=0$ parabola $y=x^2-8x-12$ $V(4,-28)$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ 2 intersezioni con l'asse x (perchè $y_V<0$)




$$x=\frac{4\pm\sqrt{16+12}}{1}=4\pm2\sqrt{7}$$

$x_1=4-2\sqrt{7}$ $x_2=4+2\sqrt{7}$

P.ti: $(4-2\sqrt{7},0)$ $(4+2\sqrt{7},0)$

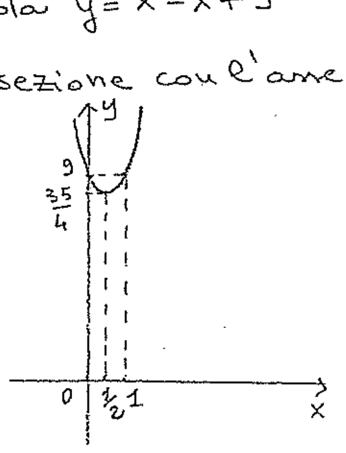
SOL.$^{NI}$ EQ.$^{NE}$ $x=4-2\sqrt{7}, x=4+2\sqrt{7}$

j) $-x^2+x-9=0$ $x^2-x+9=0$ parabola $y=x^2-x+9$ $V\left(\frac{1}{2},\frac{35}{4}\right)$

rivolta verso l'alto $\Rightarrow$ nessuna intersezione con l'asse x (perchè $y_V>0$).

E infatti $x=\dfrac{1\pm\sqrt{1-36}}{2}=\dfrac{1\pm\sqrt{-35}}{2}$

nessuna sol.$^{ne}$



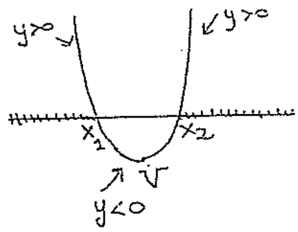
Naturalmente le parabole per risolvere le eq.$^{ni}$ di 2° grado non sono assolutamente indispensabili, possono dare però una previsione sul risultato.
Molto più utili risultano invece per le DISEQUAZIONI.

- se ci chiediamo in quali punti la parabola $y = ax^2 + bx + c$ ha ordinata $y > 0$ (cioè in quali punti il disegno è sopra all'asse x) otteniamo

$$\begin{cases} y > 0 \\ y = ax^2 + by + c \end{cases} \qquad \begin{cases} y = ax^2 + by + c \\ ax^2 + by + c > 0 \end{cases}$$

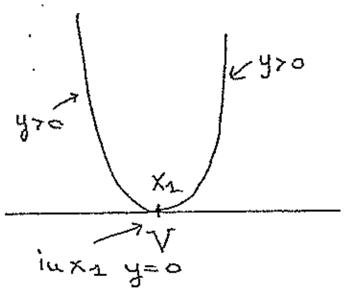
e siamo ricondotti ad una disequazione di 2° grado:

CASO 1 $\boxed{a > 0}$ (cioè la parabola è rivolta verso l'alto)



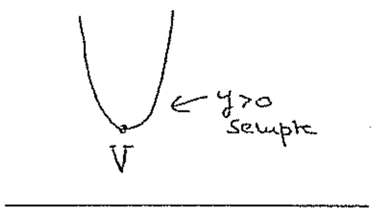

- se l'eq.$^{ne}$ $ax^2+bx+c=0$ ha due sol.$^{ni}$ reali e distinte $x_1 < x_2 \Rightarrow y > 0$ per

$$\boxed{x < x_1 \ \text{o} \ x > x_2}$$




- se l'eq.$^{ne}$ $ax^2+bx+c=0$ ha una sola sol.$^{ne}$ $x_1$ con molteplicità 2 $\Rightarrow$ il vertice della parabola è sull'asse x e $y > 0$

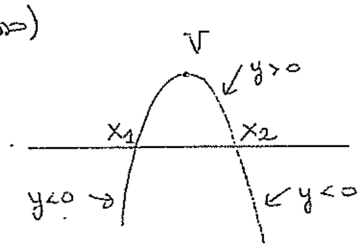
$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1\}}$$




- se l'eq.$^{ne}$ $ax^2+bx+c=0$ non ammette sol.$^{ni}$ reali $\Rightarrow$ la parabola è tutta al di sopra dell'asse x e quindi è $y > 0$

$$\boxed{\forall x \in \mathbb{R}}$$

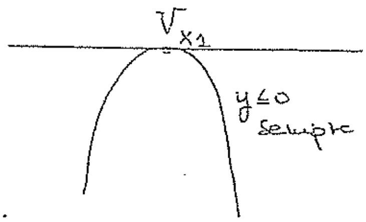
CASO 2 $\boxed{a < 0}$ (cioè la parabola è rivolta verso il basso)



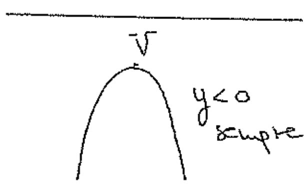

- se l'eq.$^{ne}$ $ax^2+bx+c=0$ ha due sol.$^{ni}$ reali e distinte $x_1 < x_2 \Rightarrow y > 0$ per

$$\boxed{x_1 < x < x_2}$$

- se l'eq.ne $ax^2+bx+c=0$ ha una sola sol.ne $x_1$ con molteplicità 2 $\Rightarrow$ il vertice della parabola è sull'asse x e $y>0$ non è <u>mai verificata</u>




- se l'eq.ne $ax^2+bx+c=0$ non ammette sol.ni reali $\Rightarrow$ la parabola è tutta al di sotto dell'asse x e di nuovo $y>0$ non è <u>mai verificata</u>




Analoghi ragionamenti si usano se si vuole stabilire in quali punti la parabola $y=ax^2+bx+c$ ha ordinata $y \geq 0$, $y<0$, $y \leq 0$.

Viceversa, se abbiamo una diseq.ne di 2° grado $ax^2+bx+c>0$ $(\geq, <, \leq)$ possiamo associare alla diseq.ne una parabola per aiutarci a risolvere la diseq.ne - Però prima sarebbe utile scrivere la disequazione in modo che risulti sempre $\boxed{a>0}$ (quindi se $a<0$ cambiamo di segno il 1° membro e invertiamo il segno di disequaglianza) -

Consideriamo allora la diseq.ne $ax^2+bx+c>0$ con <u>$a>0$</u> (analoghi ragionamenti per $\geq$, $<$, $\leq$).

Possiamo allora utilizzare la parabola $y=ax^2+bx+c$ e cercare i valori di x per i quali l'ordinata y risulta $>0$.

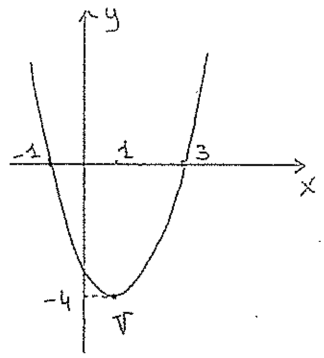
La nostra parabola sarà sempre rivolta verso l'alto.

a) $x^2-2x-3>0$ considero la parabola

$y=x^2-2x-3$ ( $V(1,-4)$, verso l'alto )

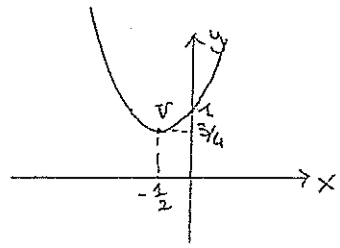
$x^2-2x-3=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=3$

allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>3$




<u>Conclusione</u>: La diseq.$^{ne}$ $x^2-2x-3>0$ è verificata da

$x<-1$ o $x>3$




c) $x^2+x+1<0$ considero la parabola

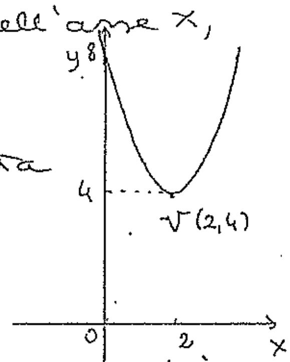
$y=x^2+x+1$. ( $V(-\frac{1}{2},\frac{3}{4})$, verso l'alto )

il vertice è al di sopra dell'asse x

quindi la parabola è tutta al di sopra dell'asse x,

allora $y>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$

La diseq.$^{ne}$ $x^2+x+1<0$ non è <u>mai</u> verificata



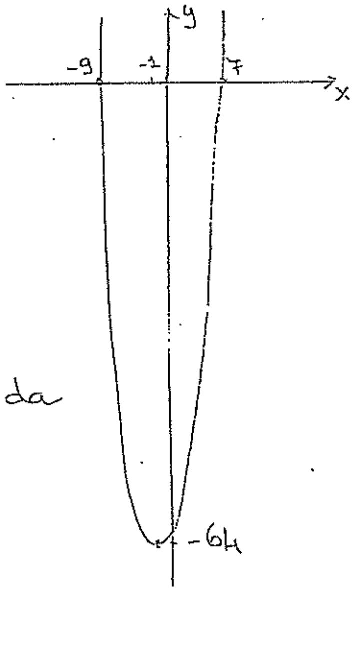

d) $x^2-4x+8\geq 0$ considero la parabola

$y=x^2-4x+8$ ( $V(2,4)$, verso l'alto )

di nuovo il vertice è al di sopra dell'asse x, quindi

$y>0 \ \forall x\in\mathbb{R}$.

La diseq.$^{ne}$ $x^2-4x+8\geq 0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$ (in realtà è sempre $>0$ )




e) $x^2+2x-63\leq 0$ considero $y=x^2+2x-63$

( $V(-1,-64)$, verso l'alto )

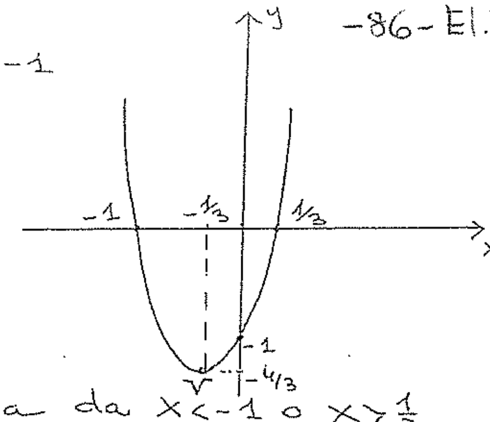
$x^2+2x-63=0 \iff x_1=7$ o $x_2=-9$

allora $y\leq 0 \iff -9\leq x\leq 7$

La diseq.$^{ne}$ $x^2+2x-63\leq 0$ è verificata da

$-9\leq x\leq 7$.

f) $3x^2+2x-1>0$ considero $y=3x^2+2x-1$
$(V(-\frac{1}{3},-\frac{4}{3})$, verso l'alto$)$

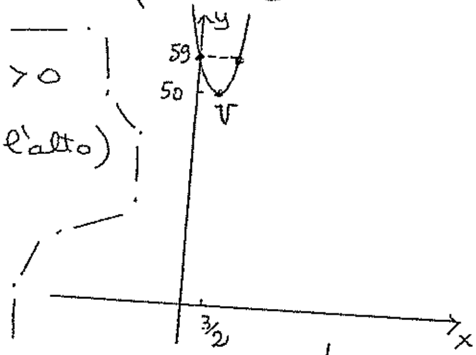



$3x^2+2x-1=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=\frac{1}{3}$

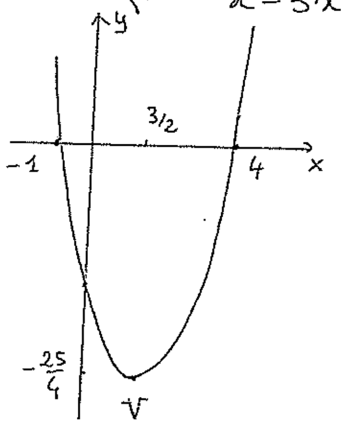
allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>\frac{1}{3}$

La diseq.ne $3x^2+2x-1>0$ è verificata da $x<-1$ o $x>\frac{1}{3}$

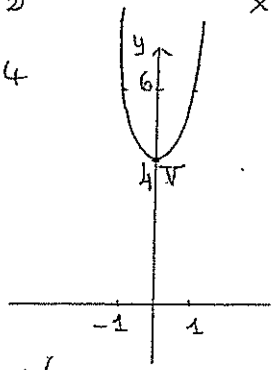
g) $-4x^2+12x-59\geq 0$ cambio segno: $4x^2-12x+59\leq 0$
Considero $y=4x^2-12x+59$ $(V(\frac{3}{2},50)$, verso l'alto$)$
il vertice è al di sopra dell'asse x per cui $y>0$ $\forall x$.
La diseq.ne $4x^2-12x+59\leq 0$ non è <u>mai</u> verificata



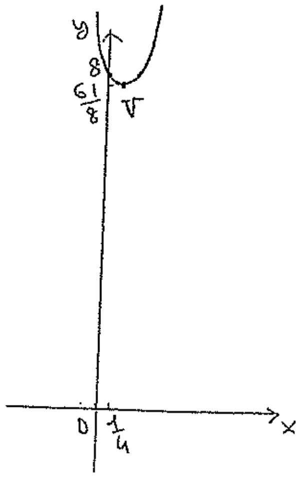

h) $-x^2+3x+4<0$ cambio segno: $x^2-3x-4>0$
considero $y=x^2-3x-4$ $(V(\frac{3}{2},-\frac{25}{4})$, verso l'alto$)$
$x^2-3x-4=0 \iff x_1=-1$ o $x_2=4$
allora $y>0 \iff x<-1$ o $x>4$
La diseq.ne $x^2-3x-4>0$ è verificata da $x<-1$ o $x>4$




k) $2x^2+4>0$ considero $y=2x^2+4$
$(V(0,4)$, verso l'alto$)$
il vertice è al disopra dell'asse x
per cui $y>0$ $\forall x$
La disep.ne $2x^2+4>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}$

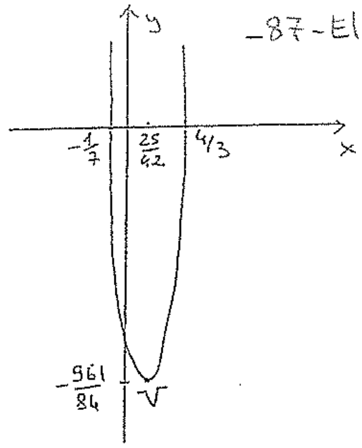



l) $6x^2-3x+8<0$ considero $y=6x^2-3x+8$
$(V(\frac{1}{4},\frac{61}{8})$, verso l'alto$)$
il vertice è al di sopra dell'asse x per cui
$y>0$ $\forall x$.
La diseq.ne $6x^2-3x+8<0$ non è <u>mai</u> verificata



m) $21x^2-25x-4>0$ considero $y=21x^2-25x-4$

($V\left(\frac{25}{42}, -\frac{961}{84}\right)$, verso l'alto)



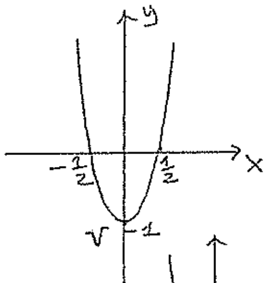

$21x^2-25x-4=0 \iff x=\dfrac{25\pm\sqrt{25^2+16\cdot 21}}{42}$

$\iff x=\dfrac{25\pm 31}{42} \iff x_1=-\frac{1}{7}$ o $x_2=\frac{4}{3}$

allora $y>0 \iff x<-\frac{1}{7}$ o $x>\frac{4}{3}$

La disep.ne $21x^2-25x-4>0$ è verificata da $x<-\frac{1}{7}$ o $x>\frac{4}{3}$.

n) $1-4x^2\geq 0$ cambio segno $4x^2-1\leq 0$

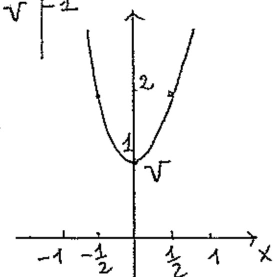



considero $y=4x^2-1$ ($V(0,-1)$, verso l'alto)

$4x^2-1=0 \iff x_1=-\frac{1}{2}$ o $x_2=\frac{1}{2}$

allora $y\leq 0 \iff -\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$

La disep.ne $4x^2-1\leq 0$ è verificata da $-\frac{1}{2}\leq x\leq\frac{1}{2}$

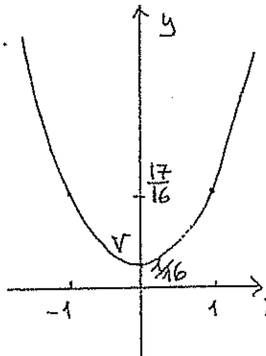



o) $-1-4x^2>0$ cambio segno $4x^2+1<0$

considero $y=4x^2+1$ ($V(0,1)$, verso l'alto)

il vertice è al disopra dell'asse x allora $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

La disep.ne $4x^2+1<0$ non è <u>mai</u> verificata.

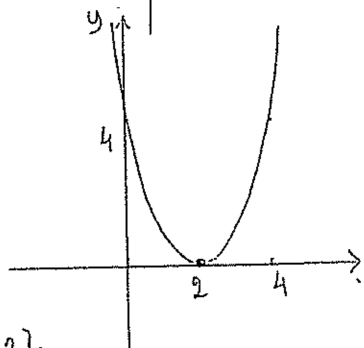



p) $x^2+\frac{1}{16}\geq 0$ considero $y=x^2+\frac{1}{16}$ ($V(0,\frac{1}{16})$, verso l'alto). Il vertice è al di sopra dell'asse x,

allora $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$.

(La disep.ne $x^2+\frac{1}{16}\geq 0$ è verificata <u>$\forall x\in\mathbb{R}$</u>

(anzi è $x^2+\frac{1}{16}>0$ $\forall x\in\mathbb{R}$)




q) $x^2-4x+4>0$ considero $y=x^2-4x+4$ ($V(2,0)$, verso l'alto). Il vertice è sull'asse x, allora

$y\geq 0$ $\forall x\in\mathbb{R}$ e $y>0$ $\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 2$

La disep.ne $x^2-4x+4>0$ è verificata $\forall x\in\mathbb{R}\setminus\{2\}$

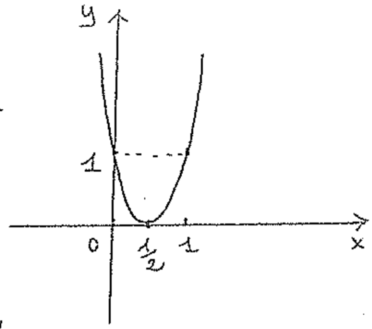
($\forall x\in\mathbb{R}, x\neq 2$).

r) $-4x^2+4x-1 \geq 0$ Cambio segno $4x^2-4x+1 \leq 0$

Considero $y=4x^2-4x+1$ ($V(\frac{1}{2},0)$, verso l'alto).

Il vertice è sull'asse $x$, allora $y \geq 0$ $\forall x \in \mathbb{R}$

e $y \leq 0$ solo in $x=\frac{1}{2}$ dove vale 0.




La disequazione $4x^2-4x+1 \leq 0$ è verificata per $x=\frac{1}{2}$.

102bis) a) $-3 \leq x \leq -2$ $x \in [-3,-2]$ b) $-3 < x < \frac{5}{2}$ $x \in ]-3,\frac{5}{2}[$ c) $x \leq 0 \cup x \geq 1$ $x \in ]-\infty,0] \cup [1,+\infty[$

d) $x \in ]-\infty,-2[ \cup ]2,+\infty[$ $x<-2 \cup x>2$ e) $\forall x$ $(x \in \mathbb{R})$ f) $\forall x$ $(x \in \mathbb{R})$ g) $\forall x \neq 0$ $(x \in \mathbb{R}\setminus\{0\})$ $x \in ]-\infty,0[ \cup ]0,+\infty[$

h) $x=0$ i) nessun $x$ j) $-5 \leq x \leq 5$ $x \in [-5,5]$ k) $0<x<\frac{1}{3}$ $x \in ]0,\frac{1}{3}[$ l) $x<-4 \cup x>-2$ $x \in ]-\infty,-4[ \cup ]-2,+\infty[$

m) $\forall x \neq 0$ n) $x \leq -10 \cup x \geq 10$ o) $\forall x \in \mathbb{R}$ p) $-5<x<-1$ q) $x=0$

r) nessun $x$ s) $-3<x<1$ t) $\forall x \in \mathbb{R}$ u) $\forall x \neq -1$