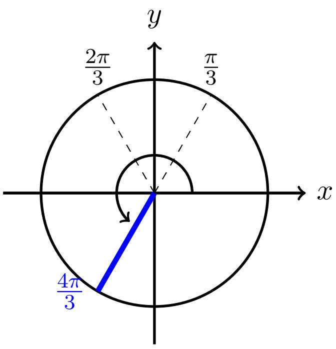
Tutorato – Soluzione esercitazione 3

1. Disegnare i seguenti angoli sulla circonferenza goniometrica e calcolarne seno, coseno e tangente.

$$\frac{4\pi}{3}, \frac{5\pi}{4}, -\frac{\pi}{6}, \frac{9\pi}{4}, -\frac{10\pi}{3}.$$

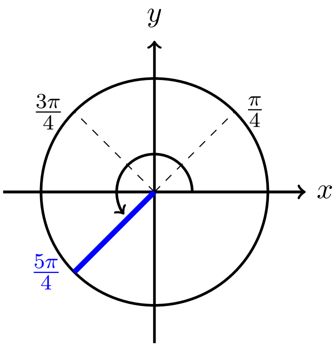
Soluzione



$$\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

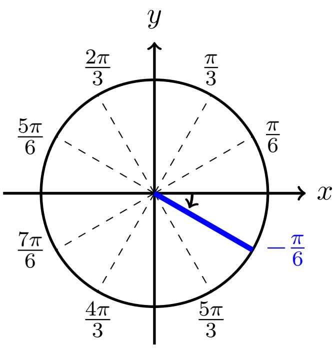
$$\tan\left(\frac{4\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{4\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{4\pi}{3}\right)} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}.$$



$$\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \sin\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \cos\left(\pi + \frac{\pi}{4}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$$

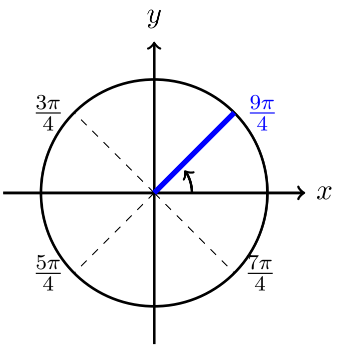
$$\tan\left(\frac{5\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{5\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{5\pi}{4}\right)} = \frac{-\sqrt{2}/2}{-\sqrt{2}/2} = 1.$$



$$\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{6}\right) == -\frac{1}{2}$$

$$\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{6}\right) == \frac{\sqrt{3}}{2}$$

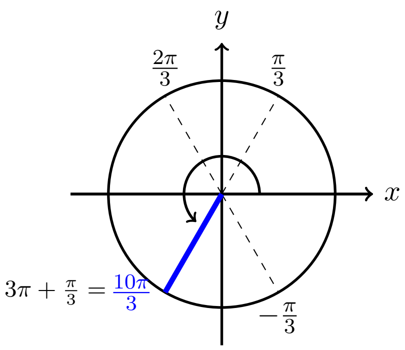
$$\tan\left(-\frac{\pi}{6}\right) = \frac{\sin\left(-\frac{\pi}{6}\right)}{\cos\left(-\frac{\pi}{6}\right)} = -\frac{1}{\sqrt{3}}.$$



$$\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \sin\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \sin\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \cos\left(2\pi + \frac{\pi}{4}\right) = \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$$\tan\left(\frac{9\pi}{4}\right) = \frac{\sin\left(\frac{9\pi}{4}\right)}{\cos\left(\frac{9\pi}{4}\right)} = \frac{\sqrt{2}/2}{\sqrt{2}/2} = 1.$$



$$\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \sin\left(\frac{9\pi}{3} + \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) =$$

$$= \sin\left(\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\sin\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}.$$

$$\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \cos\left(3\pi + \frac{\pi}{3}\right) = -\cos\left(\frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{2}$$

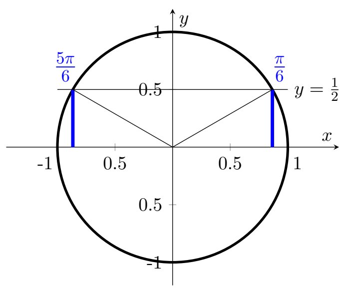
$$\tan\left(\frac{10\pi}{3}\right) = \frac{\sin\left(\frac{10\pi}{3}\right)}{\cos\left(\frac{10\pi}{3}\right)} = \frac{-\sqrt{3}/2}{-1/2} = \sqrt{3}.$$

---

2. Risolvere le seguenti equazioni trigonometriche per $0 \leq x \leq 2\pi$.
   (a) $\sin(x) = 1/2$
   (b) $\cos(x) = \frac{3}{2}$
   (c) $\tan(x) = 1$
   (d) $\sin^2 x = \frac{3}{4}$

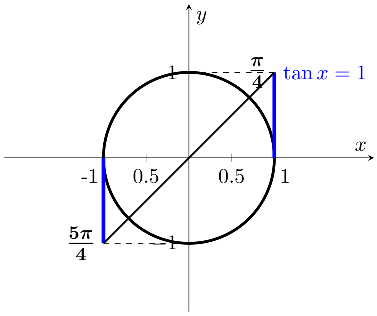
Soluzione

(a) Usiamo la circonferenza goniometrica, e disegniamo la retta $y = \frac{1}{2}$. Vediamo quindi che $\sin x = \frac{1}{2}$ per $x = \frac{\pi}{6}$ o $x = \frac{5\pi}{6}$



(b) Il coseno non può mai essere maggiore di 1, $-1 \leq \cos x \leq 1$, mentre $\frac{3}{2}$ lo è, $\frac{3}{2} > 1$. Di conseguenza, l'equazione non ha soluzione.

(c) Il campo di esistenza della tangente, per $x \in [0, 2\pi]$, è $x \neq \frac{\pi}{2}$ e $x \neq \frac{3\pi}{2}$. La tangente vale uno per angoli il cui coseno e seno sono uguali. Osservando la circonferenza goniometrica, questo vale per $x = \pi/4$ e, essendo la periodicità della tangente π, per $\frac{5\pi}{4}$.

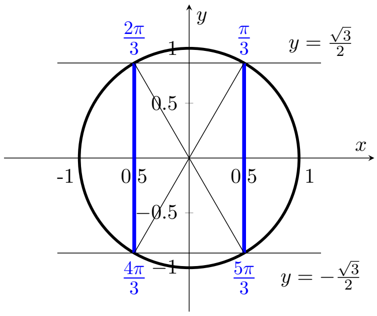


(d) Sostituendo $t = \sin x$, e risolvendo l'equazione quadratica $t^2 = \frac{3}{4}$, si ottiene che deve valere:

$$\sin x = -\frac{\sqrt{3}}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad \sin x = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Disegniamo le rette $y = \pm\frac{\sqrt{3}}{2}$ sulla circonferenza goniometrica. Troviamo quindi

$$x = \frac{4\pi}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{5\pi}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{\pi}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{2\pi}{3}.$$



3. Risolvere, per $0 \le x \le 2\pi$,

(a) $1 + \frac{1}{2}\sin(2x) = \cos^2 x$,

(b) $\cos x \left(\sin^2 x - \frac{1}{2}\right)\left(\cos^2 x + \frac{1}{2}\right) = 0$.

(c) $\cos 2x - \cos x = 0$.

(d) $\frac{\sqrt{3}-\tan(x)}{1+\sin(x)} = 0$.

Soluzione

(a) Portiamo $\cos^2 x$ a sinistra, e utilizziamo che $\sin^2 x + \cos^2 x = 1 \iff 1 - \cos^2 x = \sin^2 x$. L'equazione diventa

$$\sin^2 x + \frac{1}{2}\sin(2x) = 0.$$

Utilizziamo ora la formula di duplicazione $\sin(2x) = 2\sin x\cos x$, ottenendo

$$\sin^2 x + \sin(x)\cos x = 0.$$

Raccogliendo $\sin x$,

$$\sin x(\sin x + \cos x) = 0.$$

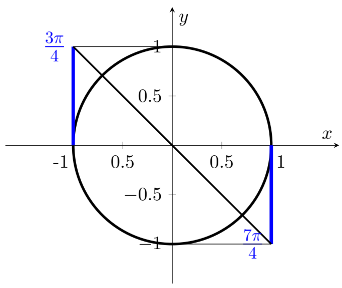
Per la legge di annullamento del prodotto deve quindi valere

$$\sin x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \sin x + \cos x = 0.$$

Ossia, per $0 \le x \le 2\pi$,

$$x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad x = \pi \quad \underline{\text{o}} \quad x = 2\pi \quad \underline{\text{o}} \quad \sin x = -\cos x.$$

Guardiamo l'equazione più a destra. Poiché i valori $x = \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$, dove il coseno si annulla, non sono soluzioni, possiamo dividere l'equazione per $\cos x$, ottenendo $\tan x = -1$. Guardiamo la circonferenza goniometrica:



La tangente vale quindi -1 per $x = \frac{3\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$. In conclusione, la soluzione dell'equazione di partenza è

$$x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad x = \pi \quad \underline{\text{o}} \quad x = 2\pi \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

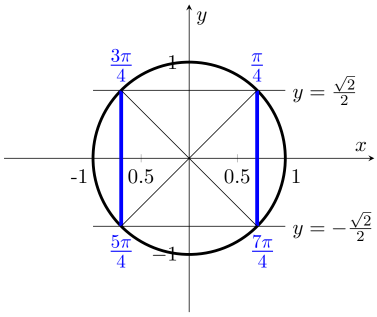
(b) Per la legge di annullamento del prodotto, abbiamo che

$$\cos x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \sin^2 x = \frac{1}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad \cos^2 x = -\frac{1}{2}.$$

Essendo $\cos^2 x$ sempre positivo, l'ultima equazione a destra non ha soluzione. Le altre due invece danno

$$x = \frac{\pi}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad \sin x = \frac{\sqrt{2}}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad \sin x = -\frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Utilizziamo la circonferenza goniometrica per risolvere la terza e quarta equazione. Disegniamo le rette $y = \pm\sqrt{2}/2$ e troviamo che la prima equazione è risolta per $x = \frac{\pi}{4}$ e $x = \frac{3\pi}{4}$, mentre la seconda è risolta per $x = \frac{5\pi}{4}$ e $x = \frac{7\pi}{4}$. La soluzione complessiva dell'equazione di partenza in $[0, 2\pi]$ è dunque



$$x = \frac{\pi}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{3\pi}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{\pi}{4} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{3\pi}{4} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{5\pi}{4} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{7\pi}{4}.$$

(c) Utilizzando la formula di duplicazione $\cos(2x) = 2\cos^2 x - 1$, l'equazione diventa

$$2\cos^2 x - 1 - \cos x = 0.$$

Questa è un'equazione quadratica in $\cos x$. Sostituendo $\cos x = t$, dobbiamo quindi risolvere $2t^2 - t - 1 = 0$. Per farlo calcoliamo il Δ: $\Delta = 1 - 4 \cdot (2) \cdot (-1) = 9$. Perciò le soluzioni sono

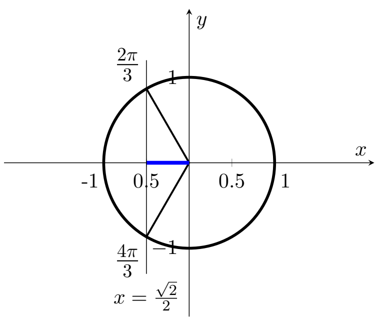
$$t = \frac{1 + \sqrt{9}}{4} = 1 \quad \underline{\text{o}} \quad t = \frac{1 - \sqrt{9}}{4} = -\frac{1}{2}.$$

Queste sono le soluzioni per il coseno, perciò dobbiamo ora risolvere:

$$\cos x = 1 \quad \underline{\text{o}} \quad \cos x = -\frac{1}{2}.$$

La prima vale per $x = 0$ e $x = 2\pi$. La seconda, guardando la circonferenza goniometrica, vale per $x = 2\pi/3$ e, siccome $\cos(\pi - x) = \cos(\pi + x)$, per $\pi + \frac{\pi}{3} = \frac{4\pi}{3}$. Le soluzioni dell'equazione di partenza sono quindi:

$$x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad x = 2\pi \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{2\pi}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{4\pi}{3}.$$



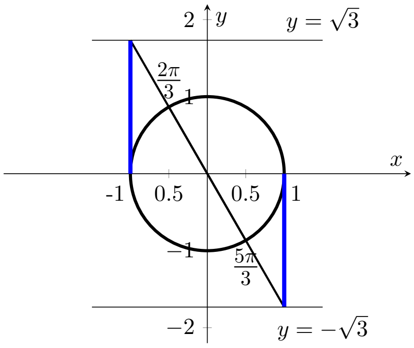
(d) Affinché la frazione a sinistra abbia senso, il denominatore deve essere non nullo e la tangente deve essere definita, perciò dobbiamo imporre

$$1 + \sin x \neq 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \sin x \neq -1 \quad \Longleftrightarrow \quad x \neq \frac{3\pi}{2}$$

e anche $x \neq \frac{\pi}{2}$. Ora, per trovare dove la frazione si annulla, cerchiamo gli zeri del numeratore.

$$\sqrt{3} - \tan x = 0 \quad \iff \quad \tan x = -\sqrt{3}.$$

Guardando la circonferenza goniometrica, questa equazione è risolta in $[0, 2\pi]$ per $\frac{2\pi}{3}$ e $\frac{5\pi}{3}$.

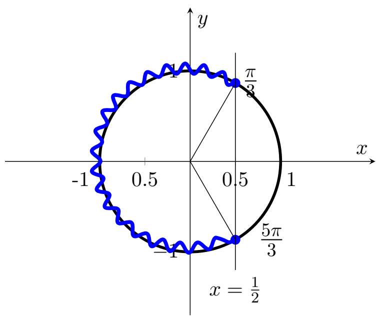


4. Risolvere le seguenti disequazioni trigonometriche per $0 \leq x \leq 2\pi$, e rappresentare la soluzione sulla circonferenza goniometrica.
   (a) $\cos(x) \leq \frac{1}{2}$,
   (b) $\tan x > 1$,
   (c) $\frac{1}{2} < \sin x \leq \frac{\sqrt{3}}{2}$.

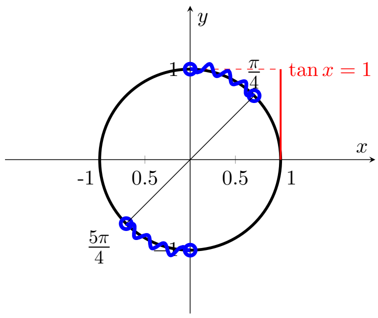
Soluzione

(a) Dalla circonferenza goniometrica vediamo che il coseno vale $1/2$ per $x = \pi/3$ e $x = 5\pi/3$. Sappiamo che assume valori minori o uguali a $1/2$ in $[0, 2\pi]$ per

$$\frac{\pi}{3} \leq x \leq \frac{5\pi}{3}$$



(b) Usando la circonferenza goniometrica, troviamo che la tangente vale uno per $x = \frac{\pi}{4}$ e $\frac{5\pi}{4}$. La tangente diventa maggiore di uno per angoli maggiori di questi fino a che si raggiunge l'asintoto successivo, situato rispettivamente a $x = \frac{\pi}{2}$ e $x = \frac{3\pi}{2}$.

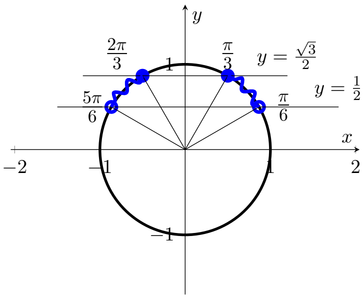


Perciò

$$\frac{\pi}{4} < x < \frac{\pi}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad \frac{5\pi}{4} < x < \frac{3\pi}{2}.$$

(c) Utilizziamo la circonferenza goniometrica e tracciamo le rette $y = \frac{1}{2}$ e $y = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Osserviamo quindi che deve valere

$$\frac{\pi}{6} < x \leq \frac{\pi}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad \frac{2\pi}{3} \leq x < \frac{5\pi}{6}.$$



---

5. Risolvere

(a) $|x^2 - 4x| \leq 0$,

(b) $4 + x = |5 - 2x| + 7x$,

(c) $|3x - 4| < 2x + 5$.

Soluzione

(a) La quantità a sinistra, essendo un valore assoluto, non può essere negativa. Di conseguenza la disequazione ha soluzione solo quando l'uguaglianza è soddisfatta:

$$|x^2 - 4x| = 0 \iff x^2 - 4x = 0 \iff x(x-4) = 0 \iff x = 0 \quad \underline{\text{o}} \quad x = 4.$$

(b) Isoliamo il valore assoluto: $|5 - 2x| = 4 - 6x$. Ora possiamo impostare il sistema

$$|a(x)| = b(x) \iff \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = b(x) \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} b(x) \geq 0 \\ a(x) = -b(x) \end{cases}$$

che dà per il nostro caso

$$\iff \begin{cases} 4 - 6x \geq 0 \\ 5 - 2x = 4 - 6x \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} 4 - 6x \geq 0 \\ 5 - 2x = 6x - 4 \end{cases} \iff \begin{cases} 6x \leq 4 \\ 4x = -1 \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} 6x \leq 4 \\ 8x = 9 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = -\frac{1}{4} \end{cases} \quad \underline{\text{o}} \quad \begin{cases} x \leq \frac{2}{3} \\ x = \frac{9}{8} \end{cases} \iff x = -\frac{1}{4}.$$

L'unica soluzione è $x = -\frac{1}{4}$ in quanto il sistema di destra non ha soluzione.

(c) Impostiamo il sistema

$$|a(x)| < b(x) \iff -b(x) < a(x) < b(x),$$

che dà

$$|3x - 4| < 2x + 5 \iff -2x - 5 < 3x - 4 < 2x + 5 \iff \begin{cases} 3x - 4 > -2x - 5 \\ 3x - 4 < 2x + 5 \end{cases}$$

$$\iff \begin{cases} 5x > -1 \\ x < 9 \end{cases} \iff \begin{cases} x > -\frac{1}{5} \\ x < 9 \end{cases}$$

La soluzione è dunque $x \in \left(-\frac{1}{5}, 9\right)$.

---

6. Risolvere
$$\frac{|2x^2 - 2| - x^2}{x} < 1.$$

Soluzione

Affinché la frazione abbia senso, deve valere $x \neq 0$. Portiamo a sinistra 1 e mettiamo gli addendi a denominatore comune, ottenendo:

$$\frac{|2x^2 - 2| - x^2 - x}{x} < 0. \tag{1}$$

Studiamo il segno del numeratore

$$|2x^2 - 2| - x^2 - x \geq 0. \tag{2}$$

Isoliamo il valore assoluto $|2x^2 - 2| \geq x^2 + x$. e, ricordando che $|a(x)| \geq b(x) \iff a(x) \leq -b(x) \quad \underline{\text{o}} \quad a(x) \geq b(x)$, impostiamo

$$2x^2 - 2 \leq -x^2 - x \quad \underline{\text{o}} \quad 2x^2 - 2 \geq x^2 + x.$$

$$\iff \quad 3x^2 + x - 2 \leq 0 \quad \underline{\text{o}} \quad x^2 - x - 2 \geq 0.$$

Usando la regola di somma e prodotto, il membro di sinistra della disequazione di destra si fattorizza come $(x+1)(x-2)$, perciò si annulla in -1 e 2. L'equazione associata descrive una parabola con concavità rivolta verso l'alto, perciò la soluzione della disequazione di destra è $x \leq -1 \quad \underline{\text{o}} \quad x \geq 2$. Per quanto riguarda la disequazione di sinistra, calcoliamo il Δ: $\Delta = 1 - 4 \cdot 3 \cdot (-2) = 25$. La soluzione dell'equazione associata è quindi $x = 2/3 \quad \underline{\text{o}} \quad x = -1$. La parabola descritta dall'equazione ha di nuovo concavità rivolta verso l'alto e assume valori non positivi per $-1 \leq x \leq \frac{2}{3}$. Unendo le soluzioni delle due disequazioni di secondo grado otteniamo la soluzione della disequazione (2), ossia le regioni i cui il numeratore è non negativo:

$$x \leq \frac{2}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x \geq 2.$$

		0		$\frac{2}{3}$		2		x
Numer.	$+$		$+$	0	$-$	0	$+$	
Denom.	$-$	0	$+$		$+$		$+$	
Frazione	$-$	$\times$	$+$	0	$-$	0	$+$	

La frazione in Eq. (1) è negativa (e la disequazione di partenza è soddisfatta) per

$$x < 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \frac{2}{3} < x < 2.$$

---

7. Risolvere
$$|x^2 - 4x + 3| \geq \frac{x^2}{3}.$$

Soluzione

Usando che $|a(x)| \geq b(x) \iff a(x) \leq -b(x) \quad \underline{\text{o}} \quad a(x) \geq b(x)$, impostiamo

$$x^2 - 4x + 3 \leq -\frac{x^2}{3} \quad \underline{\text{o}} \quad x^2 - 4x + 3 \geq \frac{x^2}{3}$$
$$\iff \quad \frac{4}{3}x^2 - 4x + 3 \leq 0 \quad \underline{\text{o}} \quad \frac{2}{3}x^2 - 4x + 3 \geq 0.$$

Il delta per la disequazione di sinistra è $\Delta_{\text{sx}} = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{4}{3} \cdot 3 = 0$, perciò il membro a sinistra è un quadrato perfetto $\frac{4}{3}\left(x - \frac{3}{2}\right)^2$. La disequazione è soddisfata solo quando vale l'uguaglianza, ossia per $x = \frac{3}{2}$. Il delta per la disequazione di destra è $\Delta_{\text{dx}} = (-4)^2 - 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot 3 = 8$. La parabola descritta dall'equazione associata tocca quindi l'asse x in $\frac{4 \pm \sqrt{8}}{2 \cdot \frac{2}{3}} = \frac{3}{4}(4 \pm 2\sqrt{2}) = 3 \pm \frac{3}{\sqrt{2}}$, e ha concavità rivolta verso l'alto. La disequazione è dunque soddisfatta per $x \leq 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \underline{\text{o}} \quad x \geq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}$. Per determinare la soluzione complessiva (unendo le soluzioni delle due disequazioni), ci resta da capire come è posizionato $3/2$ sull'asse x rispetto a $3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$. Ci chiediamo quindi se

$$\frac{3}{2} > 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \iff \frac{3}{\sqrt{2}} > 3 - \frac{3}{2} \iff \frac{3}{\sqrt{2}} > \frac{3}{2} \iff \frac{1}{\sqrt{2}} > \frac{1}{2} \iff 2 > \sqrt{2}.$$

La disequazione è soddisfatta quindi $3/2$ è maggiore di $3 - \frac{3}{\sqrt{2}}$. La soluzione complessiva della disequazione di partenza è quindi

$$x \leq 3 - \frac{3}{\sqrt{2}} \quad \underline{\text{o}} \quad x = \frac{3}{2} \quad \underline{\text{o}} \quad x \geq 3 + \frac{3}{\sqrt{2}}.$$